

### Drehung um Ursprung

## Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn

### 2012 **Spielwiese mit der Schulabbildungen** **Drehung um Ursprung**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_- := A \cdot v + tr$  heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Paralleltreue und Teilverhältnistreue**.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$  ▶ *Fertig* Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit vom Drehwinkel definiert. Die Einstellung des Rechners muss RAD sein. Test

$\cos(\pi) \blacktriangleright -1$   $\cos(180^\circ) \blacktriangleright -1$  Mit dem  $^\circ$ -Zeichen multipliziert man mit  $\frac{\pi}{180}$ . Darum

funktioniert auch die Eingabe  $dd(30^\circ) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  Didaktik: auf Seite 1.4 kann

man üben, das gedrehte Bild vorherzusagen, dann mit eingebauter Drehung prüfen.

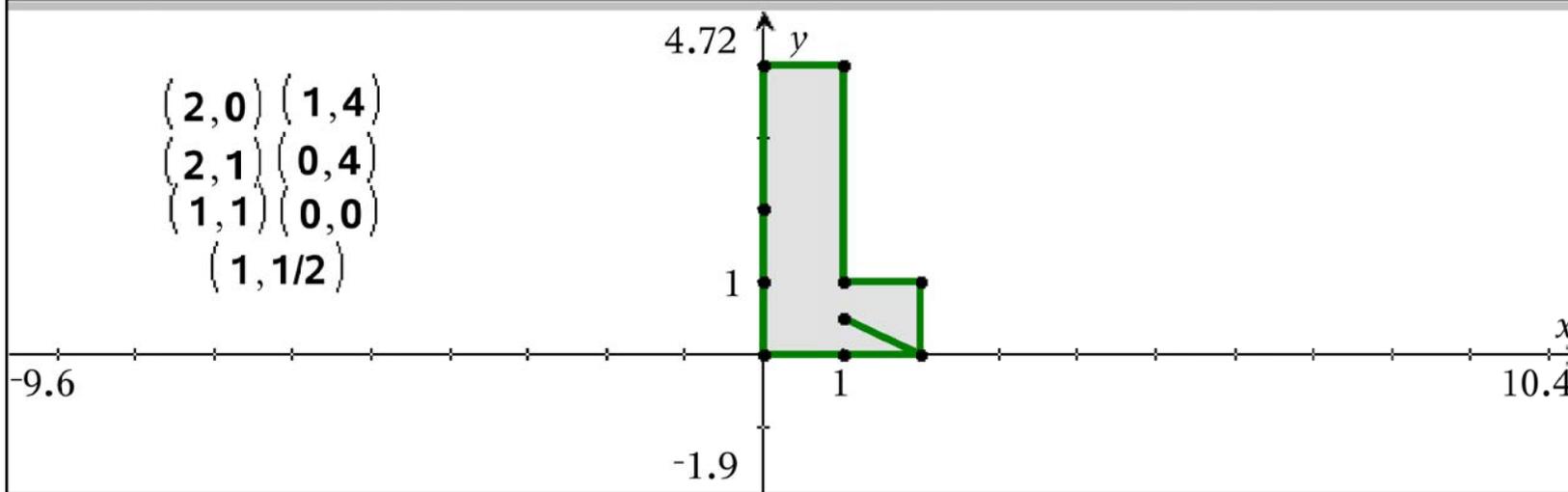
Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$p1x:=2$   $p1y:=0$   $p2x:=2$   $p2y:=1$   $p3x:=1$   $p3y:=1$   $p4x:=1$   $p4y:=3$   $p5x:=0$   $p5y:=3$

$p6x:=0$   $p6y:=0$   $p7x:=2$   $p7y:=0$   $p8x:=1$   $p8y:=\frac{1}{2}$

Urbild  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das

Bild wird dann errechnet.



1.2

### Drehung um den Ursprung mit Winkel $\alpha$ mathematisch positiv

Abbildungsmatrix  $\mathbf{dd}(\alpha) \triangleright \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$   $w \triangleright 40.$  ist eine Schiebereglerzahl

$\mathbf{dd}(w^\circ) \triangleright \begin{bmatrix} 0.766044 & -0.642788 \\ 0.642788 & 0.766044 \end{bmatrix}$   $wr:=w^\circ \triangleright 0.698132$   $\text{approx}(wr) \triangleright 0.698132$

$\mathbf{myb}:=\mathbf{dd}(w^\circ) \cdot \mathbf{myur}$

$\triangleright \begin{bmatrix} 1.53209 & 0.889301 & 0.123257 & -1.80511 & -2.57115 & 0. & 1.53209 & 0.444651 \\ 1.28558 & 2.05162 & 1.40883 & 3.70697 & 3.06418 & 0. & 1.28558 & 1.02581 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b1x}:=\mathbf{myb}[1,1] \triangleright 1.53209$   $\mathbf{b1y}:=\mathbf{myb}[2,1] \triangleright 1.28558$   $\mathbf{b2x}:=\mathbf{myb}[1,2] \triangleright 0.889301$

$\mathbf{b2y}:=\mathbf{myb}[2,2] \triangleright 2.05162$

$\mathbf{b3x}:=\mathbf{myb}[1,3] \triangleright 0.123257$   $\mathbf{b3y}:=\mathbf{myb}[2,3] \triangleright 1.40883$   $\mathbf{b4x}:=\mathbf{myb}[1,4] \triangleright -1.80511$

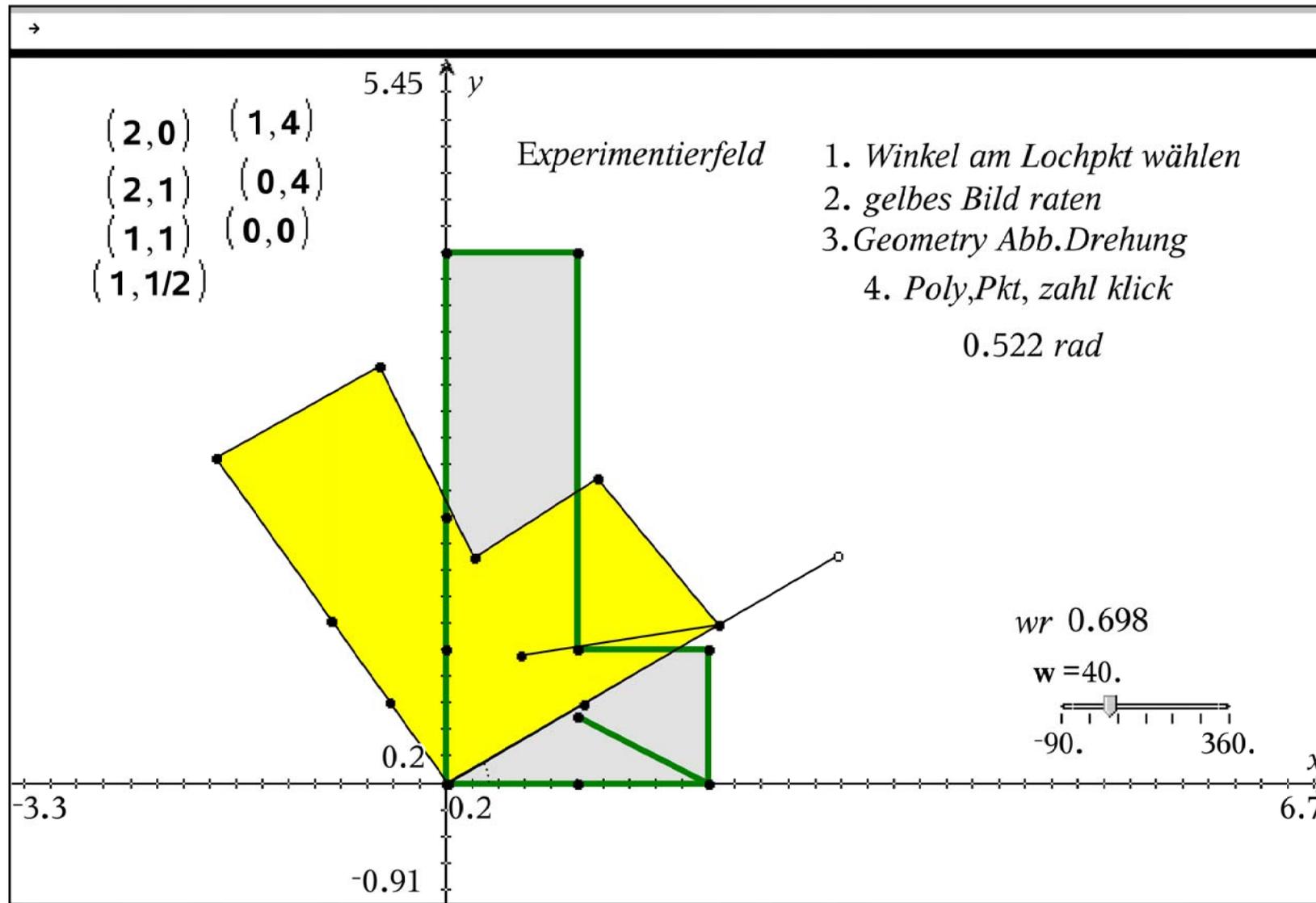
$\mathbf{b4y}:=\mathbf{myb}[2,4] \triangleright 3.70697$

$\mathbf{b5x}:=\mathbf{myb}[1,5] \triangleright -2.57115$   $\mathbf{b5y}:=\mathbf{myb}[2,5] \triangleright 3.06418$   $\mathbf{b6x}:=\mathbf{myb}[1,6] \triangleright 0.$

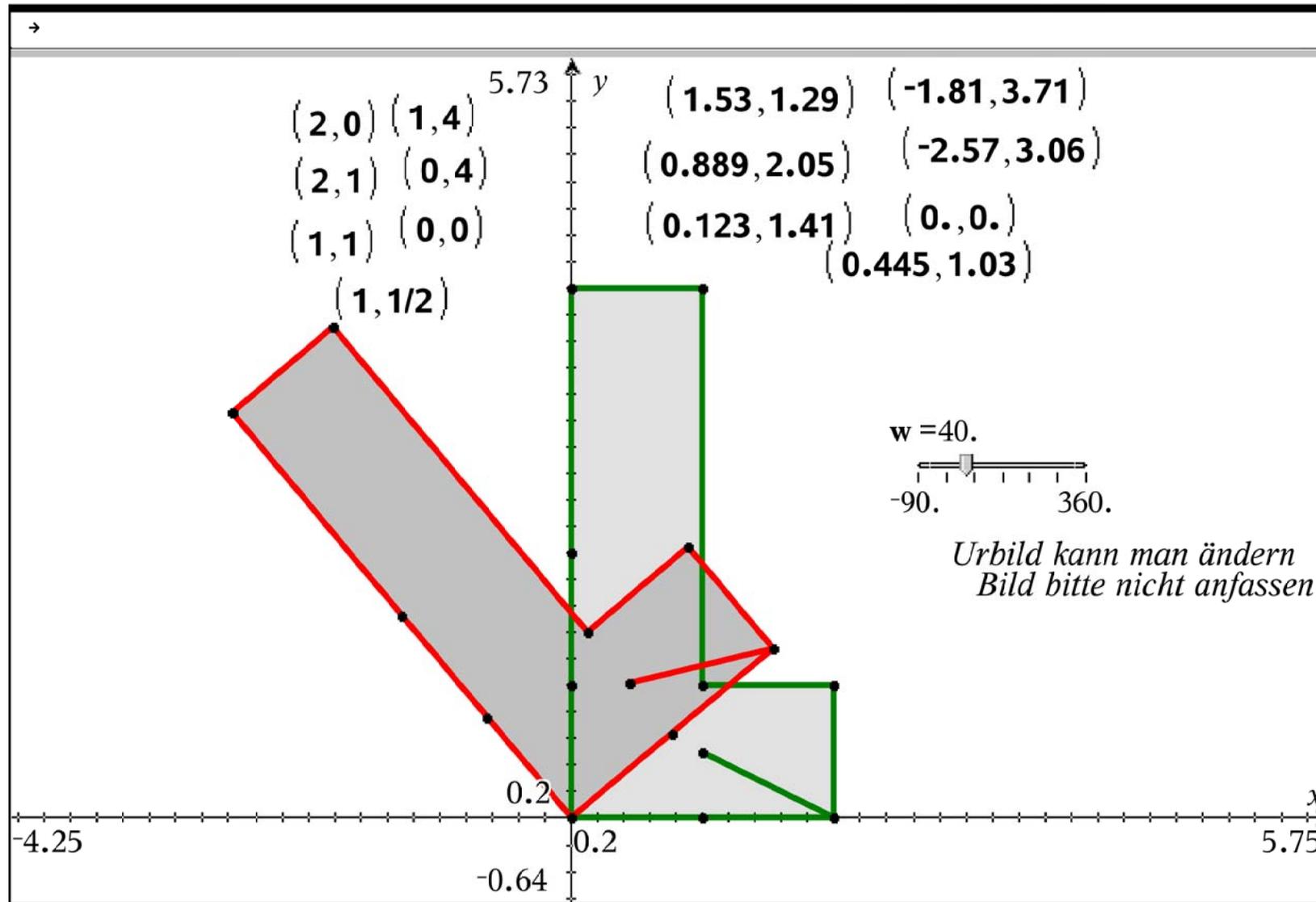
$\mathbf{b6y}:=\mathbf{myb}[2,6] \triangleright 0.$

$\mathbf{b7x}:=\mathbf{myb}[1,7] \triangleright 1.53209$   $\mathbf{b7y}:=\mathbf{myb}[2,7] \triangleright 1.28558$   $\mathbf{b8x}:=\mathbf{myb}[1,8] \triangleright 0.444651$

$\mathbf{b8y}:=\mathbf{myb}[2,8] \triangleright 1.02581$



1.4



1.5

Streckung und Drehstreckung

## Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn

2012 **Spielwiese mit der Schulabbildungen** **Streckung und Drehstreckung**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_- := A \cdot v + tr$  heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Paralleltreue und Teilverhältnistreue**.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$  ▶ *Fertig* Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit vom Drehwinkel definiert.

Eine Streckung ist definiert durch  $str(k) := \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  Es gilt

dann  $dd(\alpha) \cdot str(k) \rightarrow \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$  und

das ist natürlich auch  $k \cdot dd(\alpha) \rightarrow \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$  also definieren

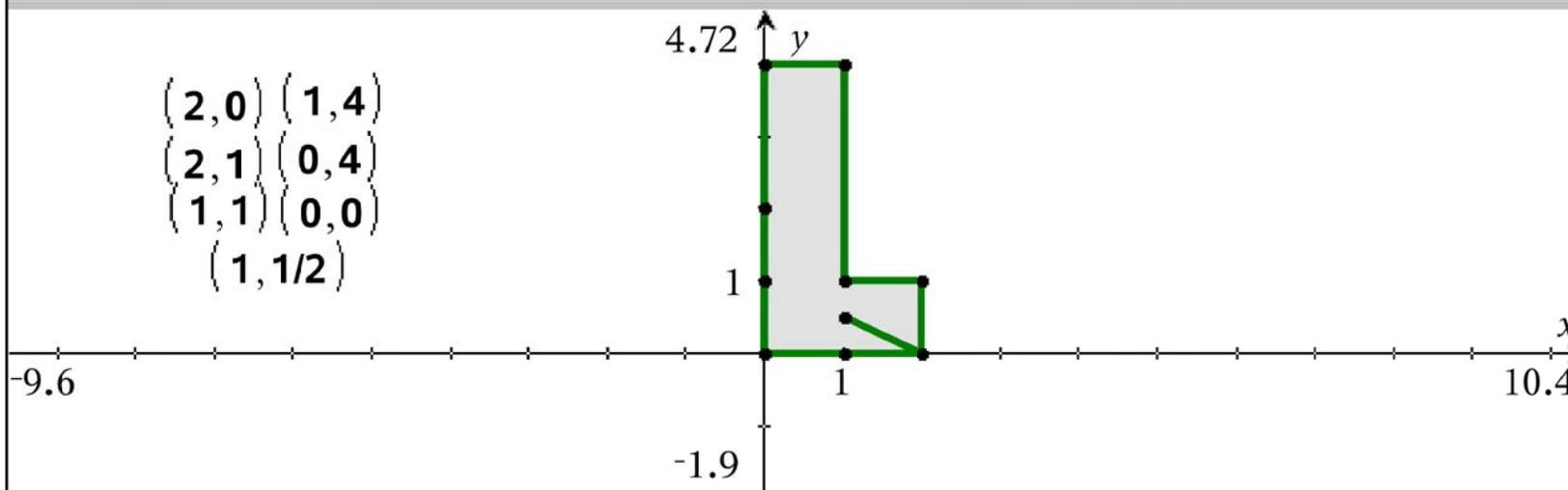
wir  $ddstr(\alpha, k) := k \cdot dd(\alpha)$  ▶ *Fertig*

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$$p1x:=2 \quad p1y:=0 \quad p2x:=2 \quad p2y:=1 \quad p3x:=1 \quad p3y:=1 \quad p4x:=1 \quad p4y:=3 \quad p5x:=0 \quad p5y:=3$$

$$p6x:=0 \quad p6y:=0 \quad p7x:=2 \quad p7y:=0 \quad p8x:=1 \quad p8y:=\frac{1}{2}$$

Urbild  $myur:=\begin{bmatrix} p1x & p2x & p3x & p4x & p5x & p6x & p7x & p8x \\ p1y & p2y & p3y & p4y & p5y & p6y & p7y & p8y \end{bmatrix}$  Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das Bild wird dann errechnet.



2.2

### Drehung um den Ursprung mit Winkel $\alpha$ mathematisch positiv

Abbildungsmatrix  $\text{ddstr}(\alpha, k) \triangleright \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

$w \triangleright 40.$  ist eine Schiebereglerzahl ebenso  $kk \triangleright 0.75$

$\text{ddstr}(w^\circ, kk) \triangleright \begin{bmatrix} 0.574533 & -0.482091 \\ 0.482091 & 0.574533 \end{bmatrix}$        $wr := w^\circ \triangleright 0.698132$      $\text{approx}(wr)$

$\text{myb} := \text{ddstr}(w^\circ, kk) \cdot \text{myur}$

$\triangleright \begin{bmatrix} 1.14907 & 0.666976 & 0.092443 & -1.35383 & -1.92836 & 0. & 1.14907 & 0.333488 \\ 0.964181 & 1.53871 & 1.05662 & 2.78022 & 2.29813 & 0. & 0.964181 & 0.769357 \end{bmatrix}$

$\text{b1x} := \text{myb}[1,1] \triangleright 1.14907$      $\text{b1y} := \text{myb}[2,1] \triangleright 0.964181$      $\text{b2x} := \text{myb}[1,2] \triangleright 0.666976$

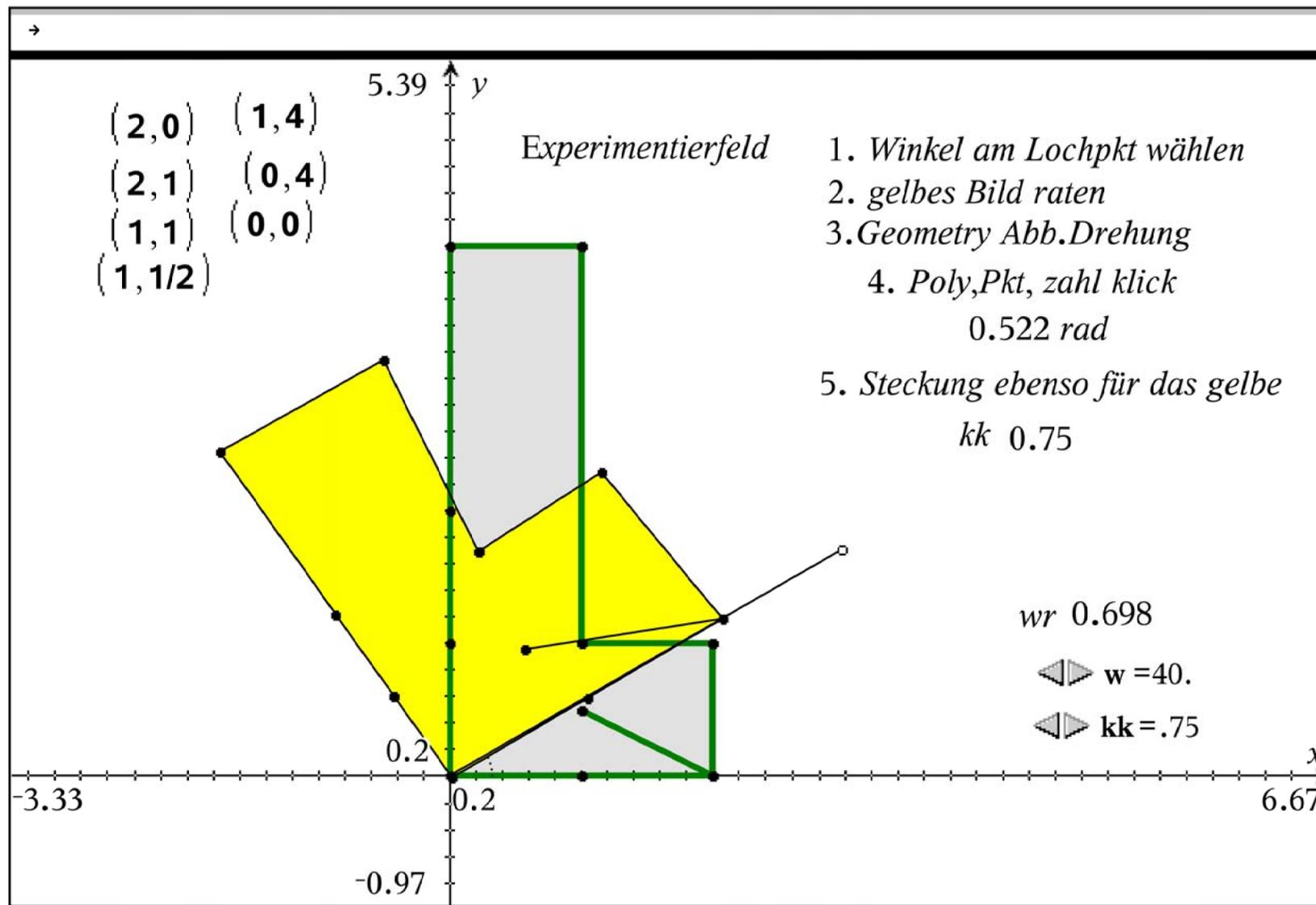
$\text{b2y} := \text{myb}[2,2] \triangleright 1.53871$      $\text{b3x} := \text{myb}[1,3] \triangleright 0.092443$      $\text{b3y} := \text{myb}[2,3] \triangleright 1.05662$

$\text{b4x} := \text{myb}[1,4] \triangleright -1.35383$      $\text{b4y} := \text{myb}[2,4] \triangleright 2.78022$      $\text{b5x} := \text{myb}[1,5] \triangleright -1.92836$

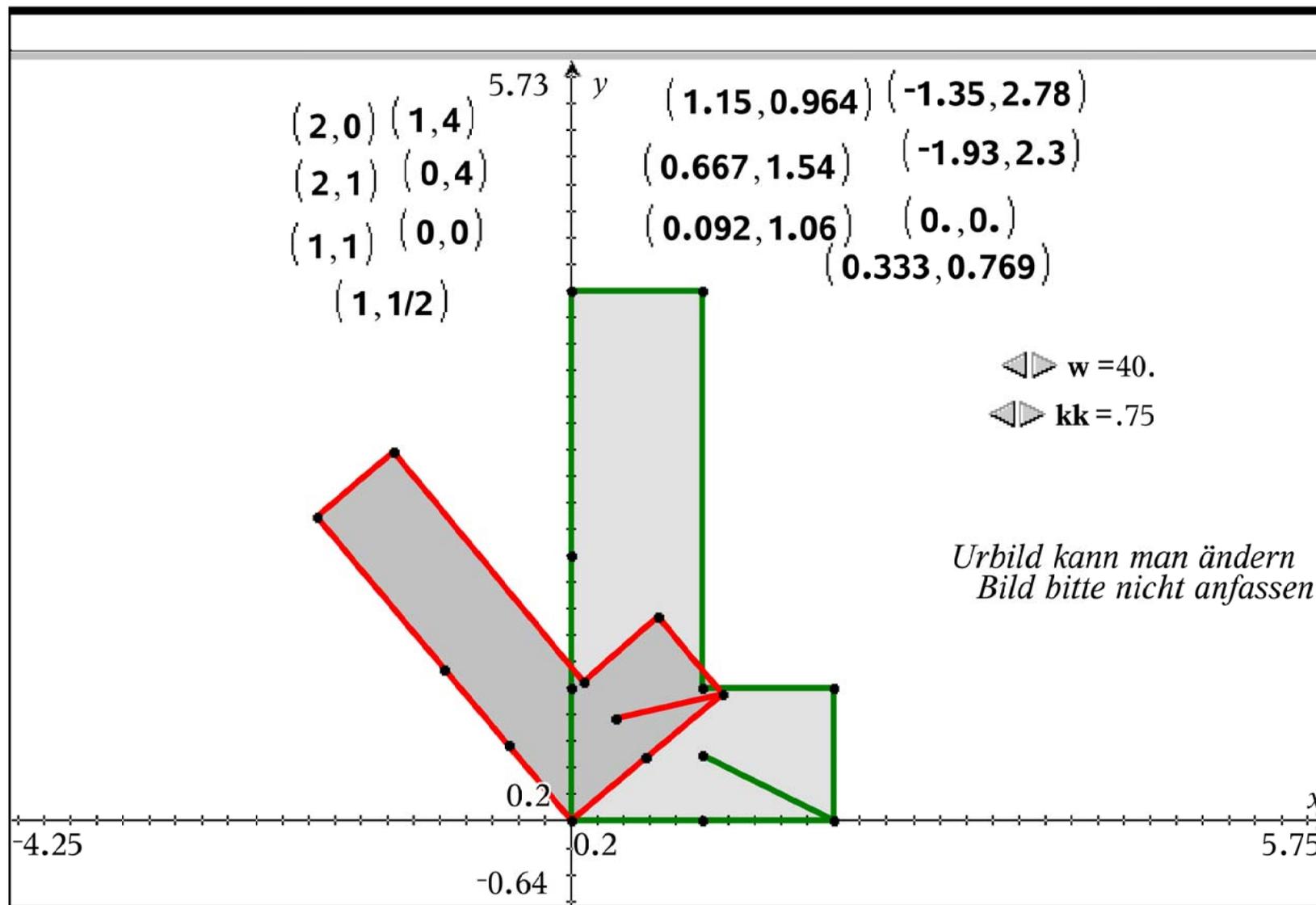
$\text{b5y} := \text{myb}[2,5] \triangleright 2.29813$      $\text{b6x} := \text{myb}[1,6] \triangleright 0.$      $\text{b6y} := \text{myb}[2,6] \triangleright 0.$

$\text{b7x} := \text{myb}[1,7] \triangleright 1.14907$      $\text{b7y} := \text{myb}[2,7] \triangleright 0.964181$      $\text{b8x} := \text{myb}[1,8] \triangleright 0.333488$

$\text{b8y} := \text{myb}[2,8] \triangleright 0.769357$



2.4



2.5

Spiegelung an Ursprungsgeraden

**Affine Abbildungen in der Schule** www.mathematik-verstehen.de Haftendorn

2012 **Spiegelung an Ursprungsgeraden**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_- := A \cdot v + tr$  heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Paralleltreue und Teilverhältnistreue**.

**Spiegelung an den Achsen**  $spx := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   $spy := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  Gerade  $y=mx$

Idee: Gerade zur x-Achse drehen, dort spiegeln und zurück drehen.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$   $sp(m) := dd(\alpha) \cdot spx \cdot dd(-\alpha) | \alpha = \arctan(m)$  *Fertig*

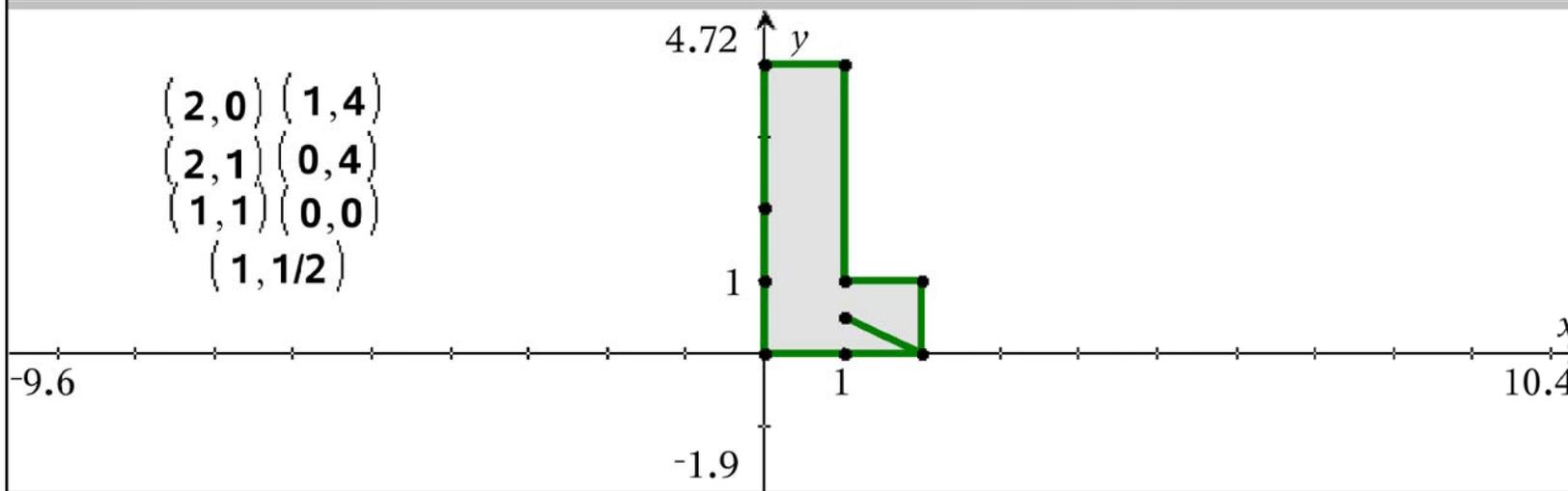
$sp(m) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-(m^2-1)}{m^2+1} & \frac{2 \cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2 \cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix}$  Schönes CAS-Ergebnis, es wäre von Hand mühsam.

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$p1x:=2$   $p1y:=0$   $p2x:=2$   $p2y:=1$   $p3x:=1$   $p3y:=1$   $p4x:=1$   $p4y:=3$   $p5x:=0$   $p5y:=3$

$p6x:=0$   $p6y:=0$   $p7x:=2$   $p7y:=0$   $p8x:=1$   $p8y:=\frac{1}{2}$

Urbild  $myur:=\begin{bmatrix} p1x & p2x & p3x & p4x & p5x & p6x & p7x & p8x \\ p1y & p2y & p3y & p4y & p5y & p6y & p7y & p8y \end{bmatrix}$  Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das Bild wird dann errechnet.



3.2

### Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung $m$

Abbildungsmatrix  $\text{sp}(m) \triangleright \begin{bmatrix} \frac{-(m^2-1)}{m^2+1} & \frac{2 \cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2 \cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix}$   $mm \triangleright -0.7$  ist eine

Schiebereglerzahl

$\text{myb} := \text{sp}(mm) \cdot \text{myur}$

$\triangleright \begin{bmatrix} 0.684564 & -0.255034 & -0.597315 & -3.41611 & -3.75839 & 0. & 0.684564 & -0.127517 \\ -1.87919 & -2.22148 & -1.28188 & -2.30872 & -1.36913 & 0. & -1.87919 & -1.11074 \end{bmatrix}$

$\text{b1x} := \text{myb}[1,1] \triangleright 0.684564$   $\text{b1y} := \text{myb}[2,1] \triangleright -1.87919$   $\text{b2x} := \text{myb}[1,2] \triangleright -0.255034$

$\text{b2y} := \text{myb}[2,2] \triangleright -2.22148$   $\text{b3x} := \text{myb}[1,3] \triangleright -0.597315$   $\text{b3y} := \text{myb}[2,3] \triangleright -1.28188$

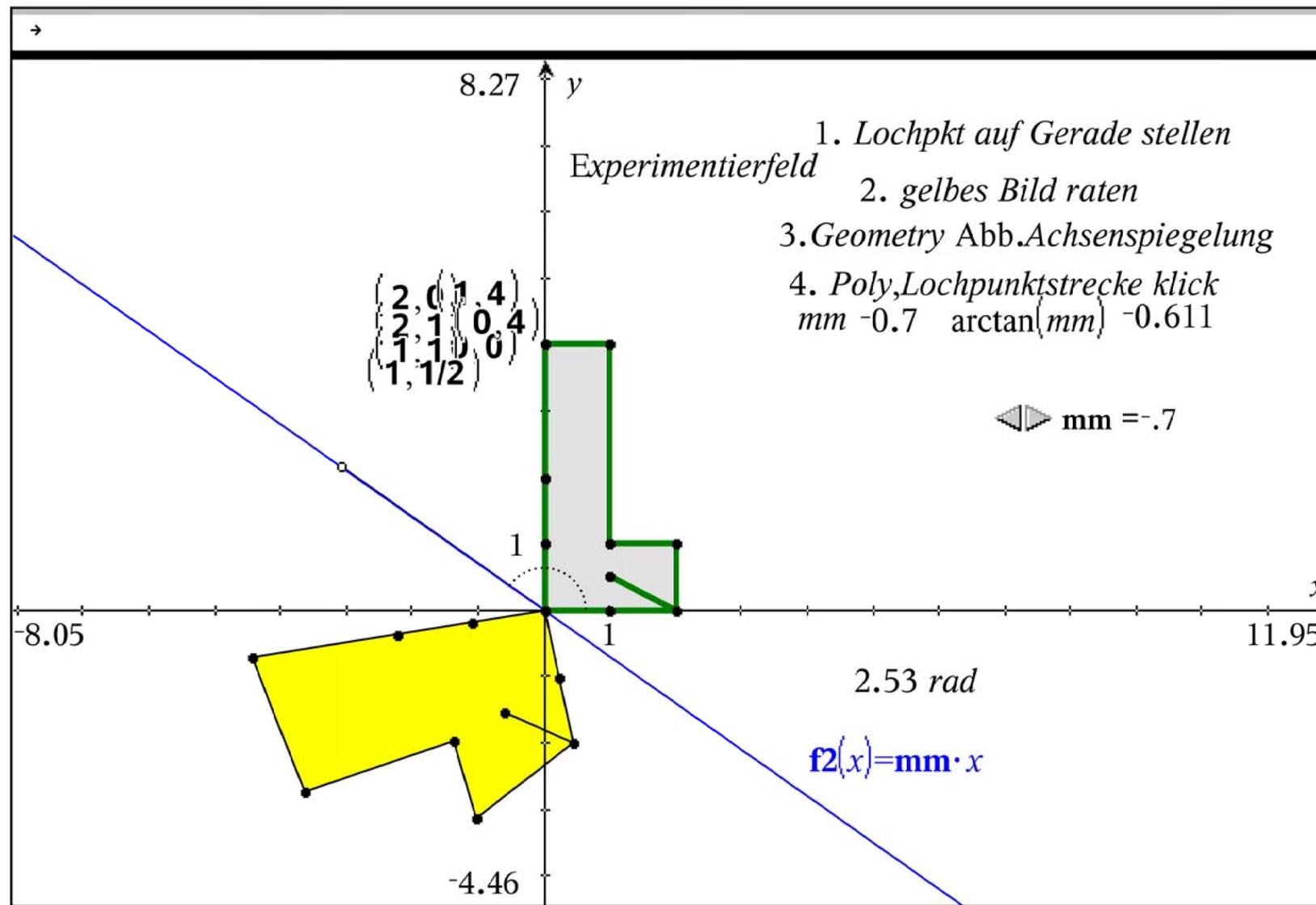
$\text{b4x} := \text{myb}[1,4] \triangleright -3.41611$   $\text{b4y} := \text{myb}[2,4] \triangleright -2.30872$   $\text{b5x} := \text{myb}[1,5] \triangleright -3.75839$

$\text{b5y} := \text{myb}[2,5] \triangleright -1.36913$   $\text{b6x} := \text{myb}[1,6] \triangleright 0.$   $\text{b6y} := \text{myb}[2,6] \triangleright 0.$

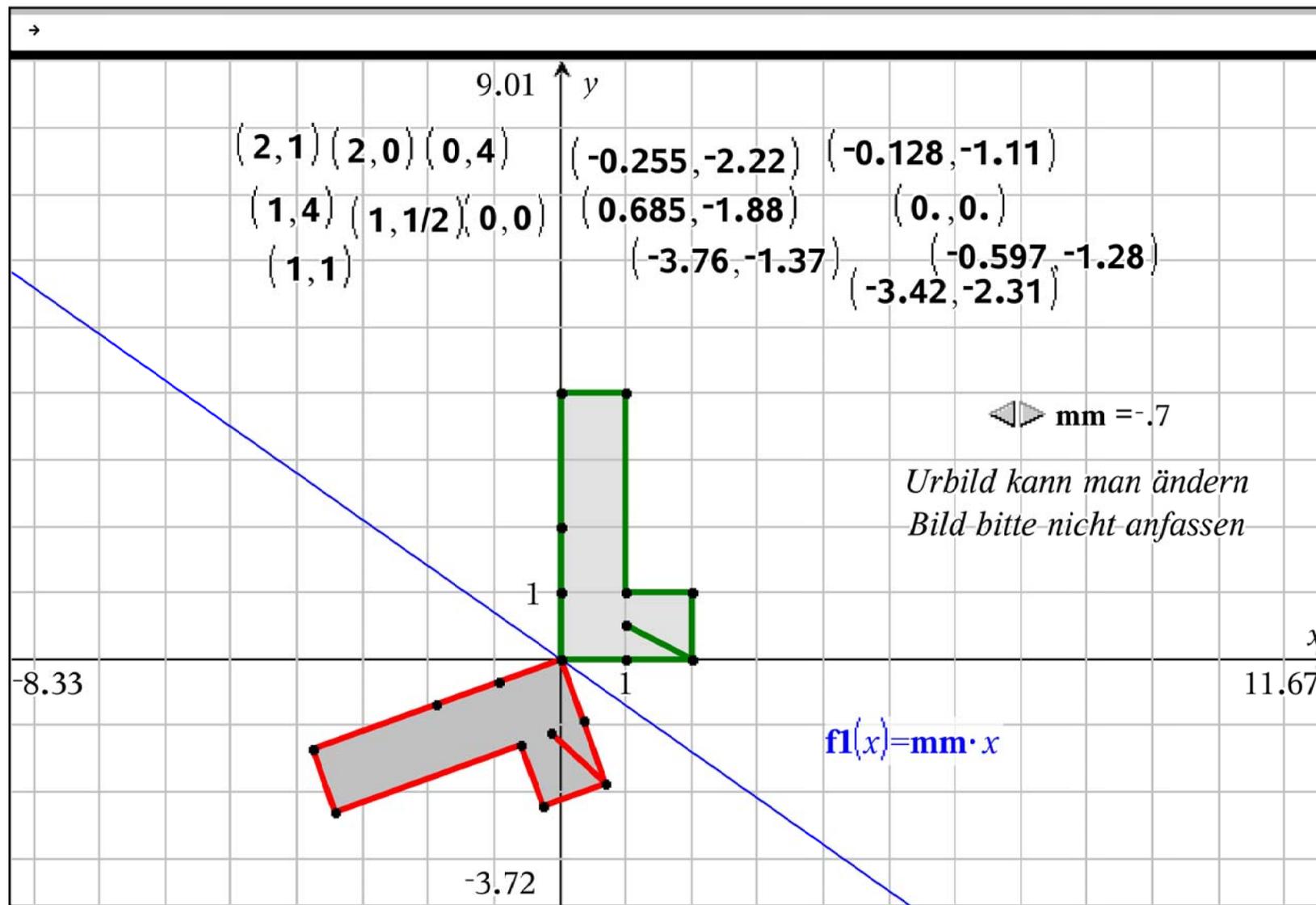
$\text{b7x} := \text{myb}[1,7] \triangleright 0.684564$   $\text{b7y} := \text{myb}[2,7] \triangleright -1.87919$

$\text{b8x} := \text{myb}[1,8] \triangleright -0.127517$   $\text{b8y} := \text{myb}[2,8] \triangleright -1.11074$

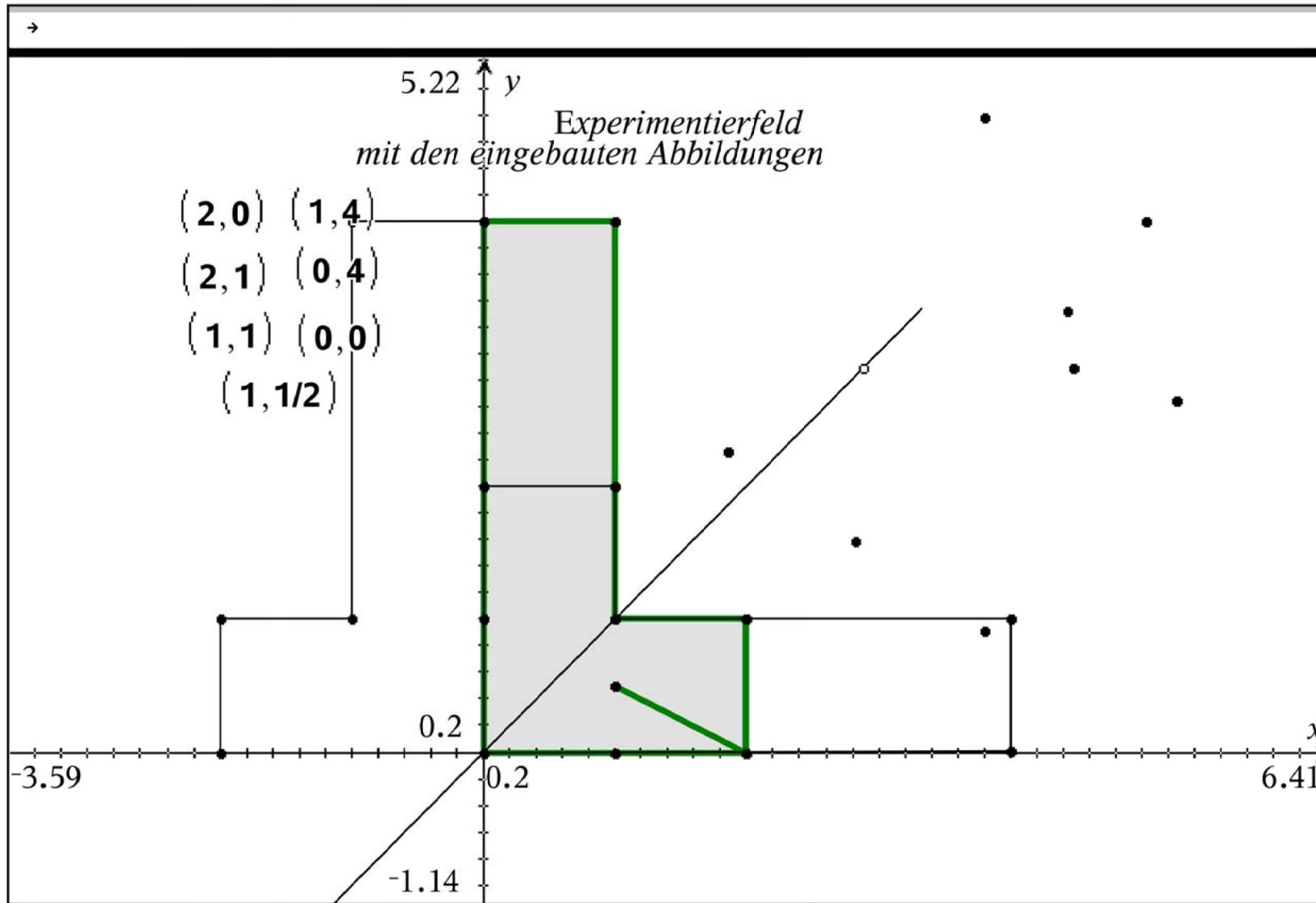
3.3



3.4



3.5



3.6

Drehung um beliebigen Punkt

## Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn

2012 **Spielwiese mit der Schulabbildungen** **Drehung um beliebigen Punkt Z**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$\mathbf{p}_- := A \cdot \mathbf{v} + \mathbf{tr}$  heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Paralleltreue und Teilverhältnistreue**.

$\mathbf{dd}(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$  *Fertig* Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit

vom Drehwinkel definiert. Der Drehpunkt habe die Koordinaten  $\mathbf{zx} \triangleright -2$  und  $\mathbf{zy} \triangleright 1$ . Sie sind auf den Seiten 4 oder 5 durch den Punkt Z interaktiv festgelegt. Idee: Schiebe Z in den Ursprung, drehe um  $w^\circ$  und schiebe zurück.

Zum Verschieben dient  $\mathbf{p}_- := \mathbf{p} + \mathbf{z}$  mit  $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} \mathbf{zx} \\ \mathbf{zy} \end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Für Einzelpunkte gilt also  $\mathbf{p}_- := \mathbf{dd}(\alpha) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{z}) + \mathbf{z}$

4.1

Um das ganze Urbild-L gleichzeitig abbilden zu können muss z "aufgebläht" werden

$$\mathbf{tr} := \begin{bmatrix} \mathbf{zx} & \mathbf{zx} \\ \mathbf{zy} & \mathbf{zy} \end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{dz}(\alpha) := \mathbf{dd}(\alpha) \cdot (\mathbf{myur} - \mathbf{tr}) + \mathbf{tr} \triangleright \text{Fertig}$$

### Beispiel

$$\mathbf{dz}(30^\circ)$$

$$\triangleright \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-3}{2} & 2 \cdot \sqrt{3}-2 & \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}-2 & \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2} & \frac{\sqrt{3}-7}{2} & \frac{\sqrt{3}-3}{2} & 2 \cdot \sqrt{3}-\frac{3}{2} & \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ 3-\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2} & \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}+2 & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Dies ist nicht die Abbildungsgleichung, sondern schon das Ergebnis der Abbildung

"Drehung des L myur um den Punkt  $\mathbf{z} \triangleright \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  um  $30^\circ$ ."

**Aufgaben: Realisieren Sie mit dieser Idee auch:**

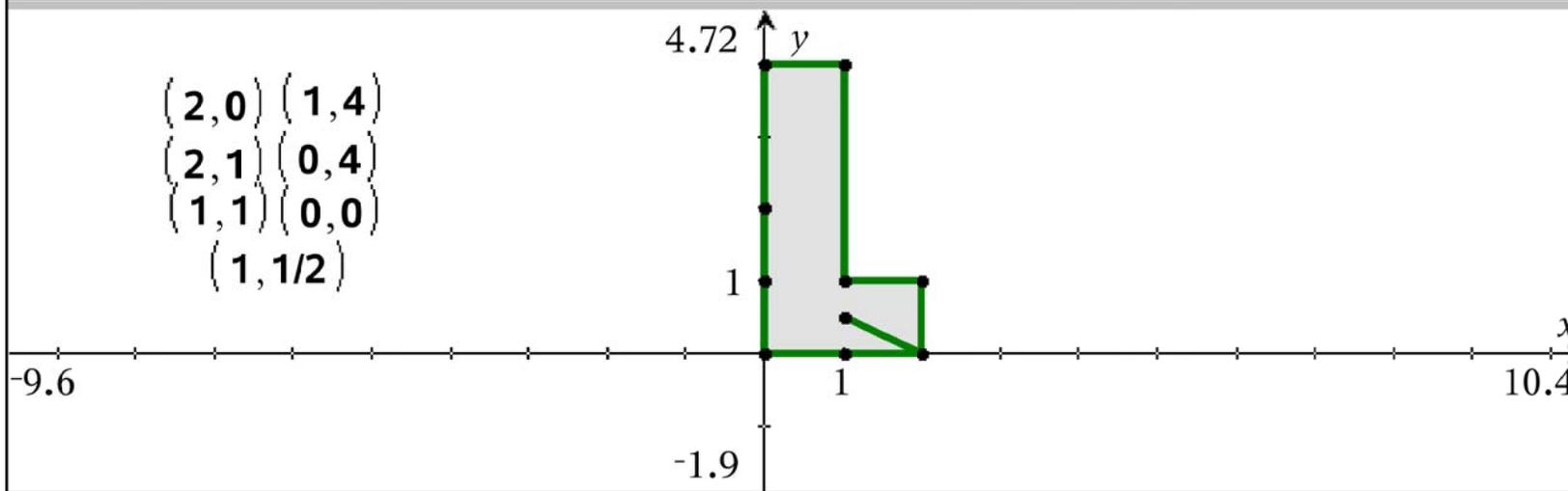
- a) Spiegeln an einer beliebigen Geraden
- b) Verschieben bei einer beliebigen affinen Abbildungen

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$p1x:=2$   $p1y:=0$   $p2x:=2$   $p2y:=1$   $p3x:=1$   $p3y:=1$   $p4x:=1$   $p4y:=3$   $p5x:=0$   $p5y:=3$

$p6x:=0$   $p6y:=0$   $p7x:=2$   $p7y:=0$   $p8x:=1$   $p8y:=\frac{1}{2}$

Urbild  $myur:=\begin{bmatrix} p1x & p2x & p3x & p4x & p5x & p6x & p7x & p8x \\ p1y & p2y & p3y & p4y & p5y & p6y & p7y & p8y \end{bmatrix}$  Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das Bild wird dann errechnet.



4.3

### Drehung um Z mit Winkel $\alpha$ mathematisch positiv

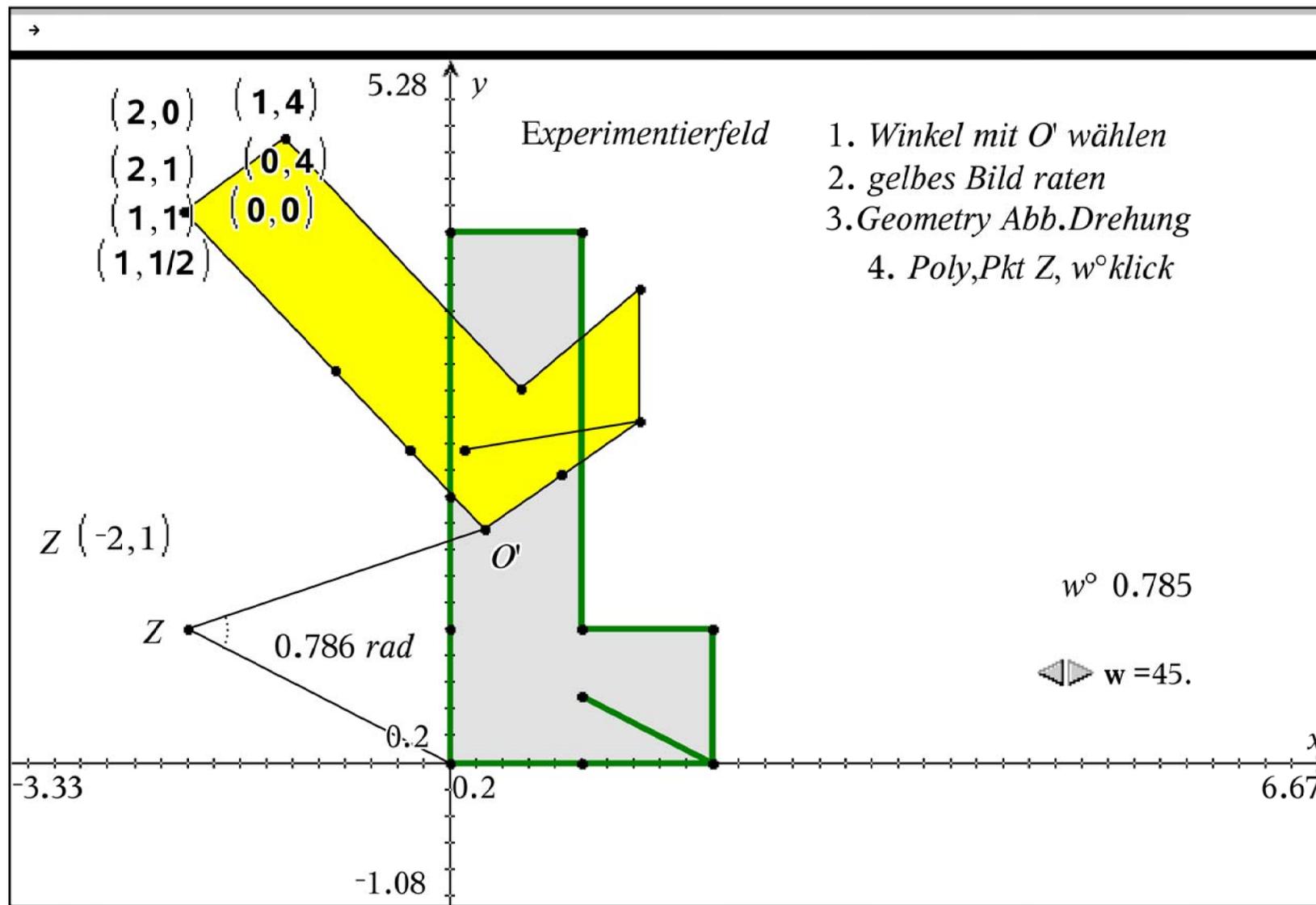
Abbildungsgleichung angewandt auf das Urbild  $myr$

$dz(w^\circ)$

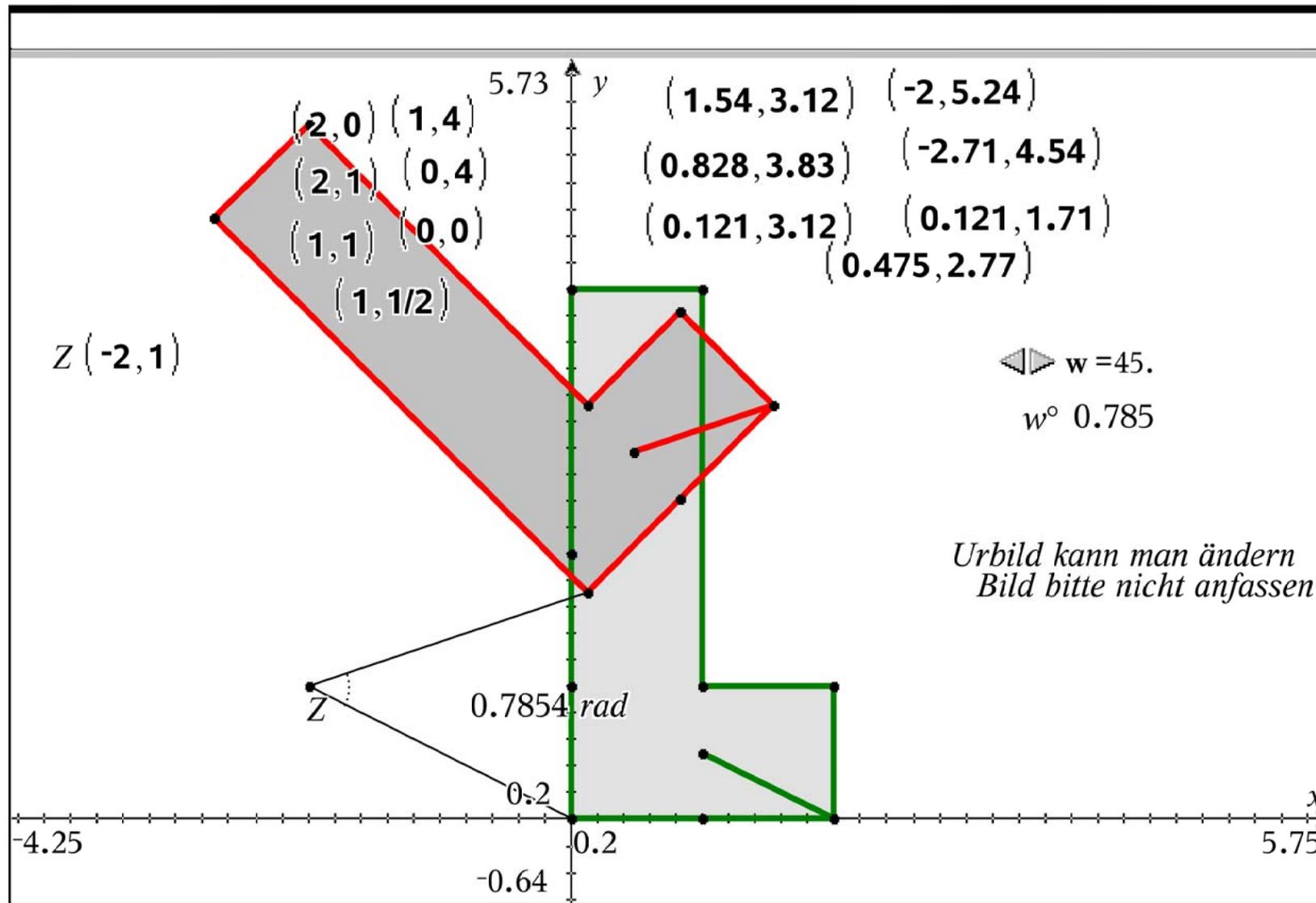
▶  $\begin{bmatrix} 1.53553 & 0.828427 & 0.12132 & -2. & -2.70711 & 0.12132 & 1.53553 & 0.474874 \\ 3.12132 & 3.82843 & 3.12132 & 5.24264 & 4.53553 & 1.70711 & 3.12132 & 2.76777 \end{bmatrix}$   
 $w$  ▶ 45. ist eine Schiebereglerzahl  $w^\circ$  ▶ 0.785398

$myb := dz(w^\circ)$

$b1x := myb[1,1]$  ▶ 1.53553  $b1y := myb[2,1]$  ▶ 3.12132  $b2x := myb[1,2]$  ▶ 0.828427  
 $b2y := myb[2,2]$  ▶ 3.82843  $b3x := myb[1,3]$  ▶ 0.12132  $b3y := myb[2,3]$  ▶ 3.12132 ▶  
 $b4x := myb[1,4]$  ▶ -2.  $b4y := myb[2,4]$  ▶ 5.24264  $b5x := myb[1,5]$  ▶ -2.70711  
 $b5y := myb[2,5]$  ▶ 4.53553  $b6x := myb[1,6]$  ▶ 0.12132  $b6y := myb[2,6]$  ▶ 1.70711  
 $b7x := myb[1,7]$  ▶ 1.53553  $b7y := myb[2,7]$  ▶ 3.12132  $b8x := myb[1,8]$  ▶ 0.474874  
 $b8y := myb[2,8]$  ▶ 2.76777



4.5



4.6