

Drehung um Ursprung

Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn 2012 Spielwiese mit der Schulabbildungen **Drehung um Ursprung**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_{-} := A \cdot v + tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue** und **Teilverhältnistreue**.

$dd(a) := \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \cdot Fertig$ Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit vom Drehwinkel definiert. Die Einstellung des Rechners muss RAD sein. Test $\cos(\pi) \cdot -1 \quad \cos(180^\circ) \cdot -1$ Mit dem "-Zeichen" multipliziert man mit $\frac{\pi}{180}$. Darum funktioniert auch die Eingabe $dd(30^\circ) \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Didaktik: auf Seite 1.4 kann man üben, das gedrehte Bild vorherzusagen, dann mit eingebauter Drehung prüfen.

1.1

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$p1x=2 \quad p1y=0 \quad p2x=2 \quad p2y=1 \quad p3x=1 \quad p3y=1 \quad p4x=1 \quad p4y=3 \quad p5x=0 \quad p5y=3$
 $p6x=0 \quad p6y=0 \quad p7x=2 \quad p7y=0 \quad p8x=1 \quad p8y=1/2$

Urbild $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das Bild wird dann errechnet.

1.2

Drehung um den Ursprung mit Winkel α mathematisch positiv

Abbildungsmatrix $dd(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad w = 40$, ist eine Schiebereglerzahl

$dd(w) \cdot \begin{bmatrix} 0.766044 & -0.642788 \\ 0.642788 & 0.766044 \end{bmatrix} \quad wr := w^\circ \cdot 0.698132 \quad approx(wr) \cdot 0.698132$

$myb := dd(w) \cdot myur$

$\begin{bmatrix} 1.53209 & 0.889301 & 0.123257 & -1.80511 & -2.57115 & 0. & 1.53209 & 0.444651 \\ 1.28558 & 2.05162 & 1.40883 & 3.70697 & 3.06418 & 0. & 1.28558 & 1.02581 \end{bmatrix}$

$b1x := myb[1,1] \cdot 1.53209 \quad b1y := myb[2,1] \cdot 1.28558 \quad b2x := myb[1,2] \cdot 0.889301$
 $b2y := myb[2,2] \cdot 2.05162$
 $b3x := myb[1,3] \cdot 0.123257 \quad b3y := myb[2,3] \cdot 1.40883 \quad b4x := myb[1,4] \cdot -1.80511$
 $b4y := myb[2,4] \cdot 3.70697$
 $b5x := myb[1,5] \cdot -2.57115 \quad b5y := myb[2,5] \cdot 3.06418 \quad b6x := myb[1,6] \cdot 0.$
 $b6y := myb[2,6] \cdot 0.$
 $b7x := myb[1,7] \cdot 1.53209 \quad b7y := myb[2,7] \cdot 1.28558 \quad b8x := myb[1,8] \cdot 0.444651$
 $b8y := myb[2,8] \cdot 1.02581$

1.3

Experimentierfeld

$\begin{pmatrix} 2,0 & 1,4 \\ 2,1 & 0,4 \\ 1,1 & 0,0 \\ 1,1/2 \end{pmatrix}$

1. Winkel am Lochpikt wählen
2. gelbes Bild raten
3. Geometry Abb. Drehung
4. Poly.Pkt., zahl klick

0.522 rad

$wr = 0.698$
 $w = 40$

1.4

$w = 40$
 -90. 360.

Urbild kann man ändern
 Bild bitte nicht anfassen

1.5

Streckung und Drehstreckung

Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn 2012 Spielwiese mit der Schulabbildungen **Streckung und Drehstreckung**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_{-} := A \cdot v + tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue** und **Teilverhältnistreue**.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot Fertig$ Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit vom Drehwinkel definiert. Eine Streckung ist definiert durch $str(k) := \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ Es gilt dann $dd(\alpha) \cdot str(k) \cdot \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ und das ist natürlich auch $k \cdot dd(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ also definieren wir $ddstr(\alpha, k) := k \cdot dd(\alpha) \cdot Fertig$

2.1

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$p1x=2 \quad p1y=0 \quad p2x=2 \quad p2y=1 \quad p3x=1 \quad p3y=1 \quad p4x=1 \quad p4y=3 \quad p5x=0 \quad p5y=3$
 $p6x=0 \quad p6y=0 \quad p7x=2 \quad p7y=0 \quad p8x=1 \quad p8y=1/2$

Urbild $myur := \begin{bmatrix} p1x & p2x & p3x & p4x & p5x & p6x & p7x & p8x \\ p1y & p2y & p3y & p4y & p5y & p6y & p7y & p8y \end{bmatrix}$ Das Urbild kann man durch Ziehen ändern. Das Bild wird dann errechnet.

2.2

Drehung um den Ursprung mit Winkel α mathematisch positiv

Abbildungsmatrix $ddstr(\alpha, k) \cdot \begin{bmatrix} k \cdot \cos(\alpha) & -k \cdot \sin(\alpha) \\ k \cdot \sin(\alpha) & k \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

$w = 40$, ist eine Schiebereglerzahl ebenso $kk = 0.75$

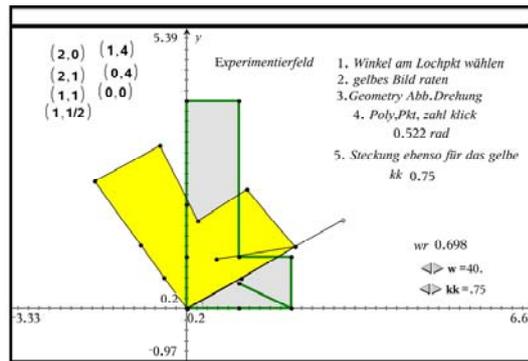
$ddstr(w, kk) \cdot \begin{bmatrix} 0.574533 & -0.482091 \\ 0.482091 & 0.574533 \end{bmatrix}$ $wr := w \cdot 0.698132$ $approx(wr)$

$myb := ddstr(w, kk) \cdot myur$

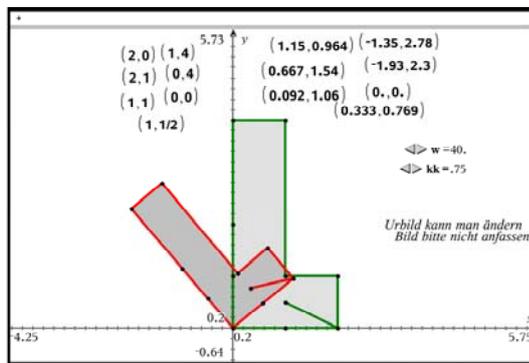
$\begin{bmatrix} 1.14907 & 0.666976 & 0.092443 & -1.35383 & -1.92836 & 0. & 1.14907 & 0.333488 \\ 0.964181 & 1.53871 & 1.05662 & 2.78022 & 2.29813 & 0. & 0.964181 & 0.769357 \end{bmatrix}$

$b1x := myb[1,1] \cdot 1.14907$ $b1y := myb[2,1] \cdot 0.964181$ $b2x := myb[1,2] \cdot 0.666976$
 $b2y := myb[2,2] \cdot 1.53871$ $b3x := myb[1,3] \cdot 0.092443$ $b3y := myb[2,3] \cdot 1.05662$
 $b4x := myb[1,4] \cdot -1.35383$ $b4y := myb[2,4] \cdot 2.78022$ $b5x := myb[1,5] \cdot -1.92836$
 $b5y := myb[2,5] \cdot 2.29813$ $b6x := myb[1,6] \cdot 0.$ $b6y := myb[2,6] \cdot 0.$
 $b7x := myb[1,7] \cdot 1.14907$ $b7y := myb[2,7] \cdot 0.964181$ $b8x := myb[1,8] \cdot 0.333488$
 $b8y := myb[2,8] \cdot 0.769357$

2.3



2.4



2.5

Spiegelung an Ursprungsgeraden

Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn 2012 Spielweise mit der Schulabbildungen **Spiegelung an Ursprungsgeraden**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen. Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_{\cdot} := A \cdot v + tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue und Teilverhältnisse treue**.

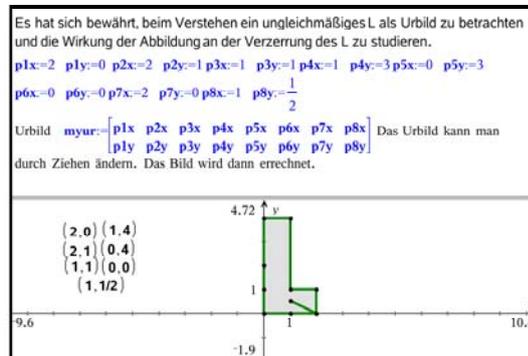
Spiegelung an den Achsen $spx := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $spy := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Gerade $y = mx$

Idee: Gerade zur x-Achse drehen, dort spiegeln und zurück drehen.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ $sp(m) := dd(\alpha) \cdot spx \cdot dd(-\alpha)$ $\alpha = \arctan(m)$ • Fertig

$sp(m) \cdot \begin{bmatrix} \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2 \cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2 \cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix}$ Schönes CAS-Ergebnis, es wäre von Hand mühsam.

3.1



3.2

Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung m

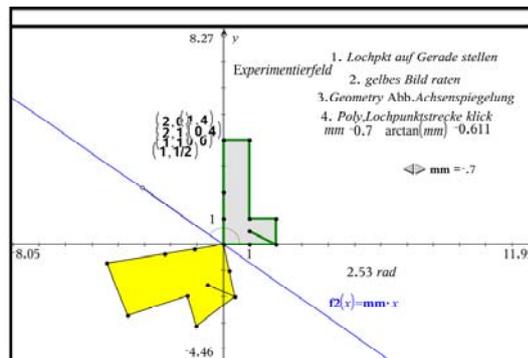
Abbildungsmatrix $sp(m) \cdot \begin{bmatrix} \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2 \cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2 \cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix}$ $mm = 0.7$ ist eine Schiebereglerzahl

$myb := sp(mm) \cdot myur$

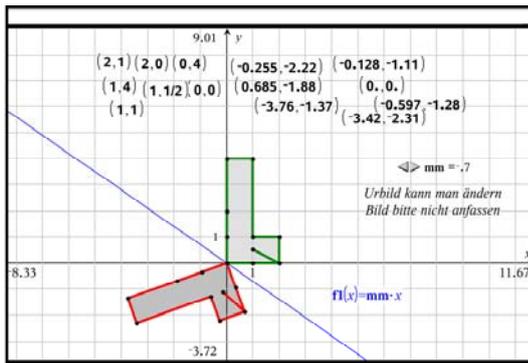
$\begin{bmatrix} 0.684564 & -0.255034 & -0.597315 & -3.41611 & -3.75839 & 0. & 0.684564 & -0.127517 \\ 1.87919 & -2.22148 & -1.28188 & 2.30872 & -1.36913 & 0. & -1.87919 & -1.11074 \end{bmatrix}$

$b1x := myb[1,1] \cdot 0.684564$ $b1y := myb[2,1] \cdot -1.87919$ $b2x := myb[1,2] \cdot -0.255034$
 $b2y := myb[2,2] \cdot -2.22148$ $b3x := myb[1,3] \cdot -0.597315$ $b3y := myb[2,3] \cdot -1.28188$
 $b4x := myb[1,4] \cdot -3.41611$ $b4y := myb[2,4] \cdot 2.30872$ $b5x := myb[1,5] \cdot -3.75839$
 $b5y := myb[2,5] \cdot -1.36913$ $b6x := myb[1,6] \cdot 0.$ $b6y := myb[2,6] \cdot 0.$
 $b7x := myb[1,7] \cdot 0.684564$ $b7y := myb[2,7] \cdot -1.87919$
 $b8x := myb[1,8] \cdot -0.127517$ $b8y := myb[2,8] \cdot -1.11074$

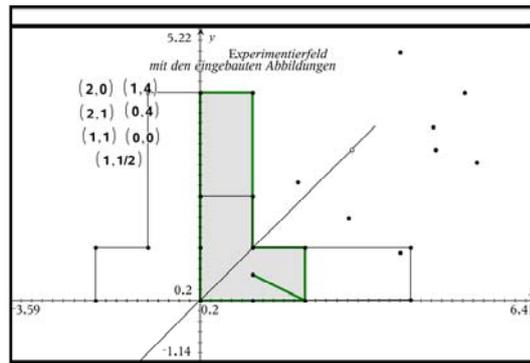
3.3



3.4



3.5



3.6

Drehung um beliebigen Punkt

Affine Abbildungen in der Schule www.mathematik-verstehen.de Haftendorn 2012 Spielweise mit der Schulabbildungen **Drehung um beliebigen Punkt Z**

In den anderen Problemen sind die anderen Abbildungen Die Grundlagen sind in einer Extradatei **affineAbb-ti.tns**

$p_- := A \cdot v + tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue** und **Teilverhältnistreue**.

$dd(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot Fertig$ Die Drehung ist hier als Funktion in Abhängigkeit vom Drehwinkel definiert. Der Drehpunkt habe die Koordinaten $zx \cdot -2$ und $zy \cdot 1$. Sie sind auf den Seiten 4 oder 5 durch den Punkt Z interaktiv festgelegt. Idee: Schiebe Z in den Ursprung, drehe um w° und schiebe zurück.

Zum Verschieben dient $p_- := p + z$ mit $z := \begin{bmatrix} zx \\ zy \\ 1 \end{bmatrix}$

Für Einzelpunkte gilt also $p_- := dd(\alpha) \cdot (p - z) + z$

4.1

Um das ganze Urbild-L gleichzeitig abbilden zu können muss z "aufgebläht" werden

$tr := \begin{bmatrix} zx & zx \\ zy & zy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$dd(\alpha) := dd(\alpha) \cdot (myur - tr) + tr \cdot Fertig$

Beispiel $dd(30^\circ)$

$\begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \\ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 & 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \end{bmatrix}$

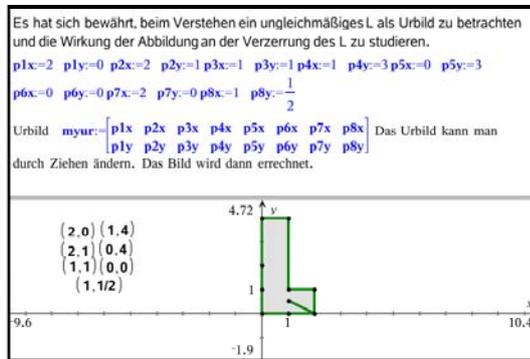
Dies ist nicht die Abbildungsgleichung, sondern schon das Ergebnis der Abbildung

*Drehung des L myur um den Punkt $z = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ um 30° .

Aufgaben: Realisieren Sie mit dieser Idee auch:

- Spiegeln an einer beliebigen Geraden
- Verschieben bei einer beliebigen affinen Abbildungen

4.2



4.3

Drehung um Z mit Winkel α mathematisch positiv

Abbildungsgleichung angewandt auf das Urbild myur

$dz(w^\circ)$

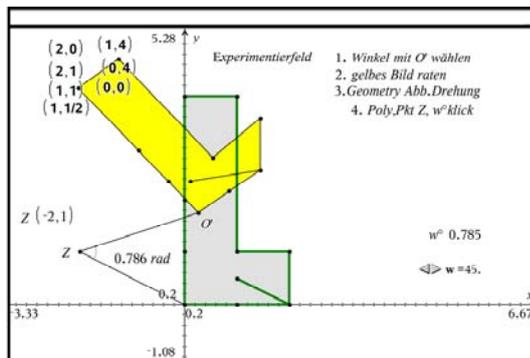
$\begin{bmatrix} 1.53553 & 0.828427 & 0.12132 & -2. & -2.70711 & 0.12132 & 1.53553 & 0.474874 \\ 3.12132 & 3.82843 & 3.12132 & 5.24264 & 4.53553 & 1.70711 & 3.12132 & 2.76777 \end{bmatrix}$

$w = 45^\circ$ ist eine Schiebereglerzahl $w^\circ = 0.785398$

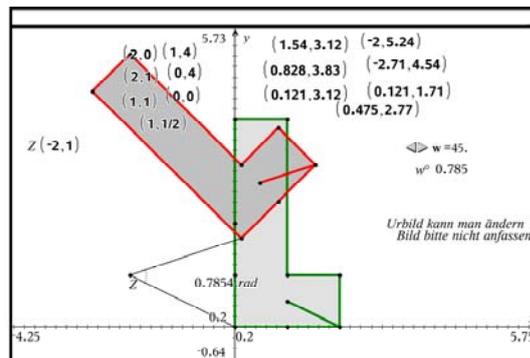
$myb := dz(w^\circ)$

$b1x=myb[1,1] \cdot 1.53553 \quad b1y=myb[2,1] \cdot 3.12132 \quad b2x=myb[1,2] \cdot 0.828427$
 $b2y=myb[2,2] \cdot 3.82843 \quad b3x=myb[1,3] \cdot 0.12132 \quad b3y=myb[2,3] \cdot 3.12132$
 $b4x=myb[1,4] \cdot -2. \quad b4y=myb[2,4] \cdot 5.24264 \quad b5x=myb[1,5] \cdot -2.70711$
 $b5y=myb[2,5] \cdot 4.53553 \quad b6x=myb[1,6] \cdot 0.12132 \quad b6y=myb[2,6] \cdot 1.70711$
 $b7x=myb[1,7] \cdot 1.53553 \quad b7y=myb[2,7] \cdot 3.12132 \quad b8x=myb[1,8] \cdot 0.474874$
 $b8y=myb[2,8] \cdot 2.76777$

4.4



4.5



4.6