# Affine Abbildungen 2d in Schule

Mathematik in wxMaxima www.mathematik-verstehen.de Haftendorn Jan 2011

### 0.1 Handling

### 0.2 Schulabbildungen, kompakt

### 0.3 Inhalt



## 1 Urbild

### 1.1 Definition

### 1.2 Zeichnen

## 2 Drehung um alpha

### 2.1 Definition der Drehung

Bilder des ersten und zweiten Einheitsvektors eintragen

```
(%i32) alpha:%pi/6;
```

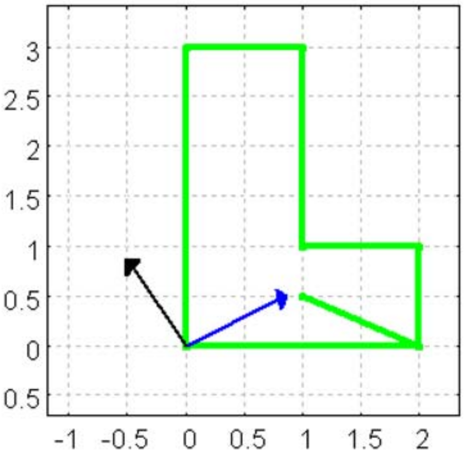
(%o32) $\frac{\%pi}{6}$

```
(%i121) D(alpha):=matrix([cos(alpha),-sin(alpha)],[sin(alpha),cos(alpha)]);
```

(%o121) $D(alpha):=\begin{bmatrix} \cos(alpha) & -\sin(alpha) \\ \sin(alpha) & \cos(alpha) \end{bmatrix}$

(%i34)
```
startbild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
           points_joined = true,color=green,
           line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
           grid=true,points(myUr) ,
           grid=true, line_width=2,point_size=0.5 ,head_length=0.1,
           color=blue,vector([0,0],[A[1,1],A[2,1]]),
           color=black,vector([0,0],[A[1,2],A[2,2]]))$
draw(startbild)$
```

Figure 2:




Der blaue    Vektor ist das Bild des x-Einheitsvektors.
Der schwarze Vektor ist das Bild des y-Einheitsvektors.

## 2.2 Affine Verzerrung für das ganze Urbild

(%i122)
```
myUr;
fpprintprec:4;
myABild:D(alpha).myUr;
%,numer;
```

(%o122) $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

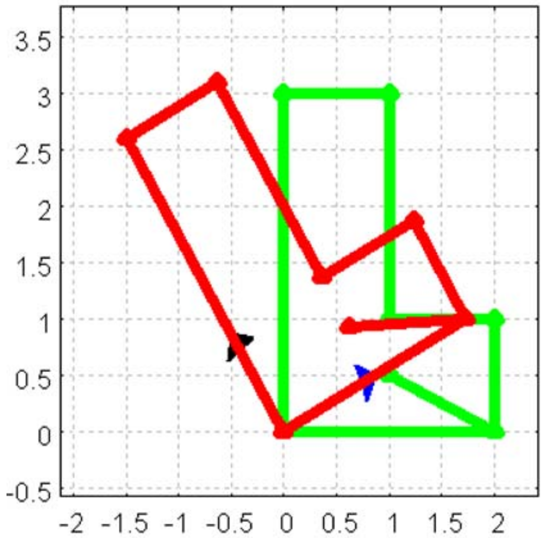
(%o123) 4

(%o124) $$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3^{3/2}}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3^{3/2}}{2} & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%o125) $$\begin{bmatrix} 1.732 & 1.232 & 0.37 & -0.63 & -1.5 & 0 & 1.732 & 0.62 \\ 1 & 1.866 & 1.366 & 3.098 & 2.598 & 0 & 1 & 0.93 \end{bmatrix}$$

```
--> ABild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
            points_joined = true,color=green,
            line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
            grid=true,points(myUr) ,
            grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
            color=blue,vector([0,0],[A[1,1],A[2,1]]),
            color=black,vector([0,0],[A[1,2],A[2,2]]),
            line_width=4,point_size=0.5, color=red,
            points(myABild)
    )$  draw(ABild)$
```

Figure 3:




## 2.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

```
(%i127) ev_all: eigenvectors(D(%pi));
(%o127) [[[-1],[2]],[[[1,0],[0,1]]]]
```

Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor

```
(%i128) charpoly(D(%pi),x);
```

(%o128) $(-x-1)^2$

```
(%i129) solve(charpoly(D(%pi),x)=0,x);
```

(%o129) $[x=-1]$

Hier sieht man den doppelten Eigenwert.

# *3 Spiegelung*

## 3.1 Spiegelung an x-Achse

## 3.2 Abbildung der Einheitsvektoren

Bilder des ersten und zweiten Einheitsvektors eintragen

(%i130) Spx:matrix([1,0],[0,-1]);

(%o130) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i131) startbild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
            points_joined = true,color=green,
            line_width     = 4,  point_size     = 0.5, point_type     = up_triangle,
            grid=true,points(myUr) ,
            grid=true, line_width=2,point_size=0.5 ,head_length=0.1,
            color=blue,vector([0,0],[Spx[1,1],Spx[2,1]]),
            color=black,vector([0,0],[Spx[1,2],Spx[2,2]]))$
        draw(startbild)$
```

Der blaue    Vektor ist das Bild des x-Einheitsvektors.
Der schwarze Vektor ist das Bild des y-Einheitsvektors.

(%i93) pv:transpose(matrix([px,py]));

(%o93) $\begin{bmatrix} px \\ py \end{bmatrix}$

## 3.3 Affine Verzerrung für das ganze Urbild

```
(%i133) myUr;
        fpprintprec:4;
        myABild:Spx.myUr;
        %,numer;
```

(%o133) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

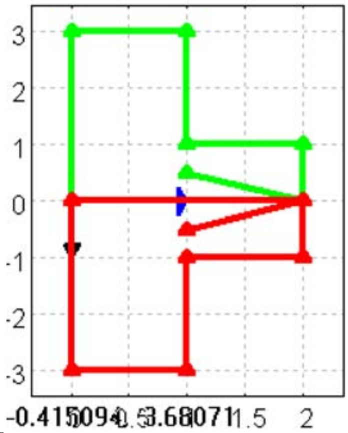
(%o134) 4

(%o135) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%o136) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$

```
-->  ABild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
            points_joined = true,color=green,
            line_width     = 4,  point_size     = 0.5, point_type     = up_triangle,
            grid=true,points(myUr) ,
            grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
            color=blue,vector([0,0],[Spx[1,1],Spx[2,1]]),
            color=black,vector([0,0],[Spx[1,2],Spx[2,2]]),
            line_width=4,point_size=0.5, color=red,
            points(myABild)
     )$  draw(ABild)$
```

Figure 4:



### 3.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

(%i137) ev_all: eigenvectors(Spx);

(%o137) [[[-1,1],[1,1]],[[[0,1]],[[1,0]]]]

Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor

(%i138) charpoly(Spx,x);

(%o138) $(-x-1)(1-x)$

(%i139) solve(charpoly(Spx,x)=0,x);

(%o139) $[x=-1, x=1]$

Hier sieht man die beiden Eigenwerte.

### 3.5 Spiegelung an y-Achse

### 3.6 Abbildung der Einheitsvektoren

Bilder des ersten und zweiten Einheitsvektors eintragen

(%i140) Spy:matrix([-1,0],[0,1]);

(%o140) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i141)
```
startbild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
        points_joined = true,color=green,
        line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
        grid=true,points(myUr) ,
        grid=true, line_width=2,point_size=0.5 ,head_length=0.1,
        color=blue,vector([0,0],[Spy[1,1],Spy[2,1]]),
        color=black,vector([0,0],[Spy[1,2],Spy[2,2]]))$
draw(startbild)$
```

Der blaue    Vektor ist das Bild des x-Einheitsvektors.
Der schwarze Vektor ist das Bild des y-Einheitsvektors.

```
--> pv:transpose(matrix([px,py]));
```

## 3.7 Affine Verzerrung für das ganze Urbild

```
(%i110) myUr;
        fpprintprec:4;
        myABild:Spy.myUr;
        %,numer;
```

(%o110) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

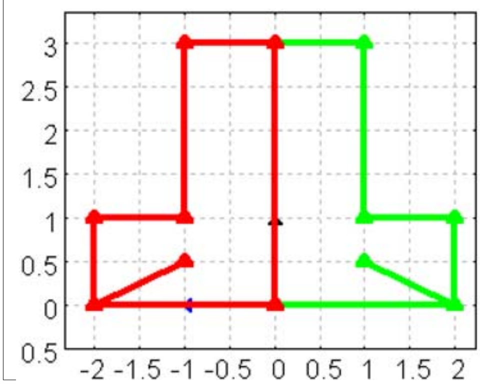
(%o111) 4

(%o112) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%o113) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

```
(%i114) ABild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                points_joined = true,color=green,
                line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                grid=true,points(myUr) ,
                grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                color=blue,vector([0,0],[Spy[1,1],Spy[2,1]]),
                color=black,vector([0,0],[Spy[1,2],Spy[2,2]]),
                line_width=4,point_size=0.5, color=red,
                points(myABild)
        )$  draw(ABild)$
```

Figure 5:




## 3.8 Eigenwerte und Eigenvektoren

```
(%i143) ev_all: eigenvectors(Spy);
(%o143) [[[-1,1],[1,1]],[[[1,0]],[[0,1]]]]
```

Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor

(%i144) charpoly(Spy,x);
(%o144) $(-x-1)(1-x)$

(%i145) solve(charpoly(Spy,x)=0,x);
(%o145) $[x=-1, x=1]$

Hier sieht man die beiden Eigenwerte.

# 4 Spiegelung an Ursprungsgeraden y=a/b*x

## 4.1 Bestimmung des Drehwinkels

(%i120) gw:atan(m);
(%o120) $\operatorname{atan}(m)$

(%i166) kill(m);
(%o166) *done*

(%i167) Sp(m):=D(atan(m)).Spx.D(-atan(m));Sp(m);
(%o167) $\mathrm{Sp}(m):=\mathrm{D}(\operatorname{atan}(m)) . Spx . \mathrm{D}(-\operatorname{atan}(m))$

(%o168) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{m^2+1}-\frac{m^2}{m^2+1} & \frac{2\,m}{m^2+1} \\ \frac{2\,m}{m^2+1} & \frac{m^2}{m^2+1}-\frac{1}{m^2+1} \end{bmatrix}$$

Bilder des ersten und zweiten Einheitsvektors können
abgelesen werden.

(%i169) Sp(2);
(%o169) $$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(%i194) Sp(-1/2);
(%o194) $$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(%i172) m:2;
(%o172) 2

```
(%i173) startbild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                points_joined = true,color=green,
                line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                grid=true,points(myUr) ,
                grid=true, line_width=2,point_size=0.5 ,head_length=0.1,
                color=blue,vector([0,0],[Sp(m)[1,1],Sp(m)[2,1]]),
                color=black,vector([0,0],[Sp(m)[1,2],Sp(m)[2,2]]))$
        draw(startbild)$
```

```
Der blaue    Vektor ist das Bild des x-Einheitsvektors.
Der schwarze Vektor ist das Bild des y-Einheitsvektors.
```

```
   --> pv:transpose(matrix([px,py]));
```

## 4.2 Affine Verzerrung für das ganze Urbild

```
(%i177) myUr;
        fpprintprec:4;
        myABild:Sp(m).myUr;
        %,numer;
```

(%o177) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

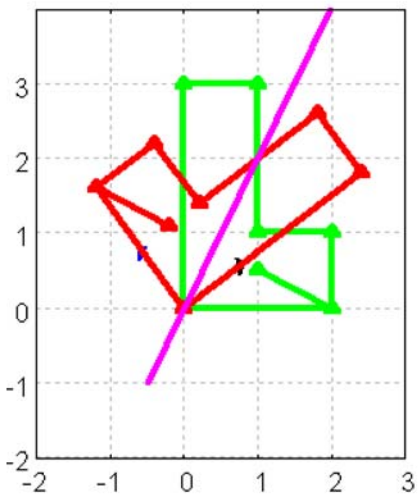
(%o178) 4

(%o179) $\begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{12}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & \frac{13}{5} & \frac{9}{5} & 0 & \frac{8}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$

(%o180) $\begin{bmatrix} -1.2 & -0.4 & 0.2 & 1.8 & 2.4 & 0 & -1.2 & -0.2 \\ 1.6 & 2.2 & 1.4 & 2.6 & 1.8 & 0 & 1.6 & 1.1 \end{bmatrix}$

```
(%i187) ABild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                points_joined = true,color=green,
                line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                grid=true,points(myUr) ,
                grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                color=blue,vector([0,0],[Sp(m)[1,1],Sp(m)[2,1]]),
                color=black,vector([0,0],[Sp(m)[1,2],Sp(m)[2,2]]),
                line_width=4,point_size=0.5, color=red,
                points(myABild), color="#ff00ff",
                polygon([-0.5,2],[-1,4])
        )$  draw(ABild)$
```

Figure 6:




## 4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

(%i189) ev_all: eigenvectors( Sp(m));

(%o189) $[[[-1,1],[1,1]],[[[1,-\frac{1}{2}]],[[1,2]]]]$

Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor

(%i190) charpoly(Sp(m),x);

(%o190) $\left(-x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}-x\right)-\frac{16}{25}$

(%i191) solve(charpoly(Sp(m),x)=0,x);

(%o191) $[x=-1,x=1]$

Hier sieht man die beiden Eigenwerte.

(%i193) determinant(Sp(m));

(%o193) -1

# 5 Steckungen

## 5.1 zentrische- und Hauptachsenstreckungen

Bilder des ersten und zweiten Einheitsvektors eintragen

(%i236) kill(k1,k2);

(%o236) *done*

Zentrische Streckungen: k1=k2
Achsenstreckungen parallel zur y-Achse: k1=1
Achsenstreckungen parallel zur x-Achse: k2=1

```
(%i237) Str(k1,k2):=matrix([k1,0],[0,k2]);
```

(%o237) $Str(k1,k2):=\begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$

```
(%i240) k1:3/2$ k2:1/2$ Str(k1,k2);
```

(%o242) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i221) startbild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                 points_joined = true,color=green,
                 line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                 grid=true,points(myUr) ,
                 grid=true, line_width=2,point_size=0.5 ,head_length=0.1,
                 color=blue,vector([0,0],[Str(k1,k2)[1,1],Str(k1,k2)[2,1]]),
                 color=black,vector([0,0],[Str(k1,k2)[1,2],Str(k1,k2)[2,2]]))$
        draw(startbild)$
```

```
Der blaue    Vektor ist das Bild des x-Einheitsvektors.
Der schwarze Vektor ist das Bild des y-Einheitsvektors.
```

## 5.2 Streckung für das ganze Urbild

```
(%i225) myUr;
        fpprintprec:4;
        myABild:Str(k1,k2).myUr;
        %,numer;
```

(%o225) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

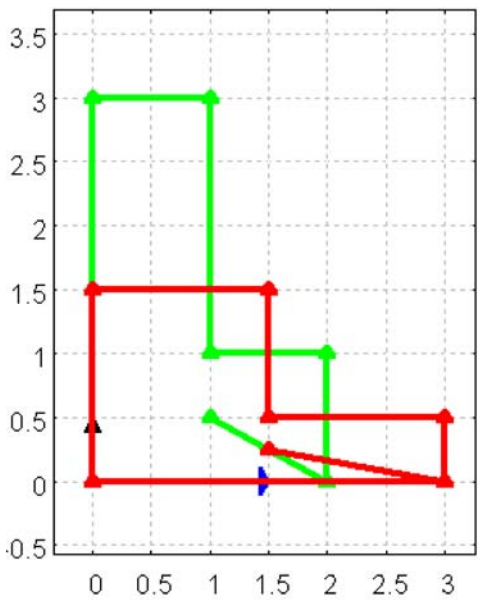
(%o226) 4

(%o227) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(%o228) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1.5 & 1.5 & 0 & 0 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

```
(%i268) ABild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                 points_joined = true,color=green,
                 line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                 grid=true,points(myUr) ,
                 grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                 color=blue,vector([0,0],[Str(k1,k2)[1,1],Str(k1,k2)[2,1]]),
                 color=black,vector([0,0],[Str(k1,k2)[1,2],Str(k1,k2)[2,2]]),
                 line_width=4,point_size=0.5, color=red,
                 points(myABild)
        )$  draw(ABild)$
```

Figure 7:




## 5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

(%i233) ev_all: eigenvectors(Str(k1,k2));

(%o233) $[[[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],[1,1]],[[[0,1]],[[1,0]]]]$

```
Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor
```

(%i234) charpoly(Str(k1,k2),x);

(%o234) $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)$

(%i235) solve(charpoly(Str(k1,k2),x)=0,x);

(%o235) $[x=\frac{1}{2},x=\frac{3}{2}]$

Hier sieht man den die Streckfaktoren als Eigenwerte.

## 5.4 Streckungen in Richtung der Geraden y=m*x

(%i297) kill(m,k,k1,k2);

(%o297) *done*

(%i304) Strachs(m,k):=D(atan(m)).Str(k,1).D(-atan(m));

(%o304) Strachs($m$,$k$):=D(atan($m$)) . Str($k$,1) . D(-atan($m$))

(%i305) Strachs(m,k);

(%o305)
$$\begin{bmatrix} \frac{m^2}{m^2+1}+\frac{k}{m^2+1} & \frac{k\,m}{m^2+1}-\frac{m}{m^2+1} \\ \frac{k\,m}{m^2+1}-\frac{m}{m^2+1} & \frac{k\,m^2}{m^2+1}+\frac{1}{m^2+1} \end{bmatrix}$$

(%i306) m:2$ k:3/2;

(%o307) $\frac{3}{2}$

## 5.5 Streckung für das ganze Urbild

```
(%i308) myUr;
        fpprintprec:4;
        myABild:Strachs(m,k).myUr;
        %,numer;
```

(%o308)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%o309) 4

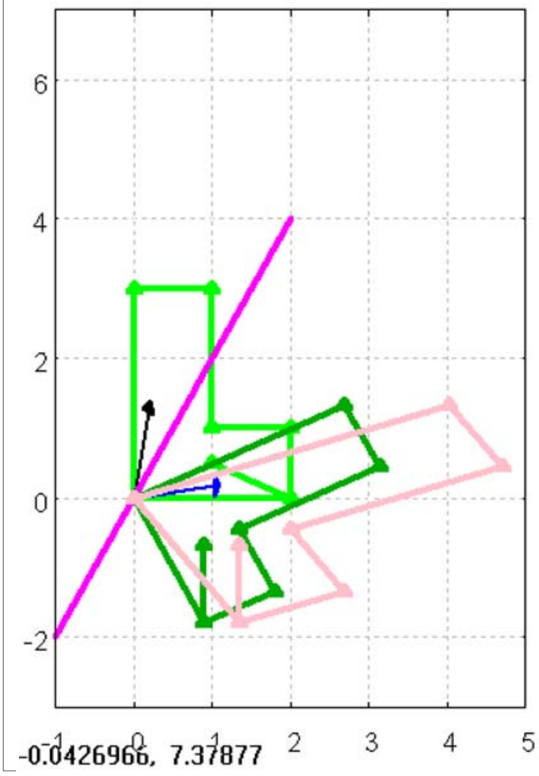
(%o310)
$$\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{13}{10} & \frac{17}{10} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{11}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} & \frac{8}{5} & \frac{22}{5} & \frac{21}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

(%o311)
$$\begin{bmatrix} 2.2 & 2.4 & 1.3 & 1.7 & 0.6 & 0 & 2.2 & 1.2 \\ 0.4 & 1.8 & 1.6 & 4.4 & 4.2 & 0 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

```
(%i342) ZBild:gr2d(xrange = [-1,5], yrange = [-3,7],
            points_joined = true,color=green,
            line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
            grid=true,points(myUr) ,
            grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
            color=blue,vector([0,0],[Strachs(m,k)[1,1],Strachs(m,k)[2,1]]),
            color=black,vector([0,0],[Strachs(m,k)[1,2],Strachs(m,k)[2,2]]),
            line_width=4,point_size=0.5, color="#00aa00",
            points(D(-atan(m)).myUr) ,color="#ff00ff",
            polygon([-1,2],[-2,4]),color=pink,
            points(Str(k,1).D(-atan(m)).myUr))$
```

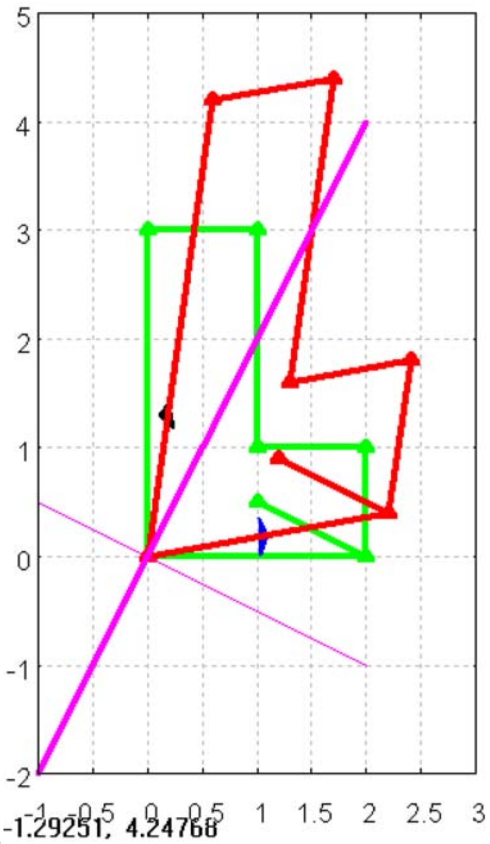
```
(%i343) draw(ZBild)$
```

Figure 8:




```
(%i356) ABild:gr2d(xrange = [-1,3], yrange = [-2,5],
                points_joined = true,color=green,
                line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                grid=true,points(myUr) ,
                grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                color=blue,vector([0,0],[Strachs(m,k)[1,1],Strachs(m,k)[2,1]]),
                color=black,vector([0,0],[Strachs(m,k)[1,2],Strachs(m,k)[2,2]]),
                line_width=4,point_size=0.5, color=red,
                points(myABild) ,color="#ff00ff",
                polygon([-1,2],[-2,4]),  line_type=dots, line_width=1,
                polygon([2,-2],[-1,1])
        )$  draw(ABild)$
```

Figure 9:




--> points(D(atan(m)).Str(k,1).D(-atan(m)).myUr)

(%i325) k;m;

(%o325) $\frac{3}{2}$

(%o326) 2

## 5.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

(%i358) ev_all: eigenvectors(Strachs(m,k));

(%o358) $[[[\frac{3}{2},1],[1,1]],[[[1,2]],[[1,-\frac{1}{2}]]]]$

Die Liste ist so zu deuten:
Erste Unterliste: die beiden Eigenwerte,
dann ihre Vielfachheiten.
Zweite Unterliste: erster Eigenvektor, zweiter Eigenvektor

(%i359) charpoly(Strachs(m,k),x);

(%o359) $\left(\frac{11}{10}-x\right)\left(\frac{7}{5}-x\right)-\frac{1}{25}$

(%i360) solve(charpoly(Strachs(m,k),x)=0,x);

(%o360) $[x=\frac{3}{2},x=1]$

(%i361) kill(m,k);

(%o361) $done$

(%i362) ev_all: eigenvectors(Strachs(m,k));

(%o362) $[[[k,1],[1,1]],[[[1,m]],[[1,-\frac{1}{m}]]]]$

Hier sieht man den die Streckfaktoren als Eigenwerte.
Die Streckachse und die zu ihr senkrechten Richtungen
sind Eigenrichtungen.

(%i365) charpoly(Strachs(m,k),x);
expand(%);

(%o365) $$\left(-x+\frac{m^2}{m^2+1}+\frac{k}{m^2+1}\right)\left(-x+\frac{k\,m^2}{m^2+1}+\frac{1}{m^2+1}\right)-\left(\frac{k\,m}{m^2+1}-\frac{m}{m^2+1}\right)^2$$

(%o366) $$x^2-\frac{k\,m^2\,x}{m^2+1}-\frac{m^2\,x}{m^2+1}-\frac{k\,x}{m^2+1}-\frac{x}{m^2+1}+\frac{k\,m^4}{m^4+2\,m^2+1}+\frac{2\,k\,m^2}{m^4+2\,m^2+1}+\frac{k}{m^4+2\,m^2+1}$$

(%i364) solve(charpoly(Strachs(m,k),x)=0,x);

(%o364) $[x=k,x=1]$

Hier sieht man den die Streckfaktoren als Eigenwerte.

# 6 Verschieben

## 6.1 Abbildungsgleichung für einen Punkt

Definition der Translation

(%i195) tx:-3$ ty:-2$

(%i197) tv:transpose(matrix([tx,ty]));

(%o197) $\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$

Eins-Abbildung Identität

(%i198) E:matrix([1,0],[0,1]);

(%o198) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(%i199) f(xv):=E.xv+tv;

(%o199) $\mathrm{f}(xv):=E\;.\;xv+tv$

(%i200) f(xv);

(%o200) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\;.\;xv+\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$

Abbildung eines beliebigen Punktes

(%i201) pv:transpose(matrix([px,py]));

(%o201) $\begin{bmatrix} px \\ py \end{bmatrix}$

(%i202) f(pv);

(%o202) $\begin{bmatrix} px-3 \\ py-2 \end{bmatrix}$

Nun muss zu jedem dieser Bildpunkte der Translationsvektor addiert werden. Dazu muss man ihn passend "aufblähen" zu einer Transformationsmatrix.

(%i203) npk:length(transpose(myUr));

(%o203) 8

(%i204) mtv(tv):=block ([m],
m:tv,for i:1 thru npk-1 do ( m:addcol(m,tv)),return( m))$

(%i205) mtv(tv);

(%o205) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Gesamte Abbildung des Urbildes

(%i207) fm(myUr):=E.myUr+mtv(tv);

(%o207) $\mathrm{fm}(myUr):=E\ .\ myUr+\mathrm{mtv}(tv)$

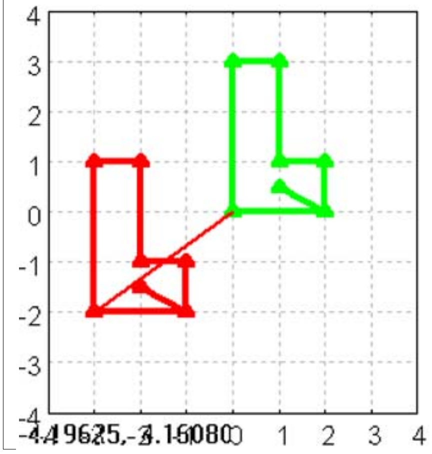
(%i208) myBild:fm(myUr);
%,numer;

(%o208) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(%o209) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -1.5 \end{bmatrix}$

```
(%i212) Bild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                  points_joined = true,color=green,
                  line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                  grid=true,points(myUr) ,
                  grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                  /*color=blue,vector([0,0],[A[1,1],A[2,1]]),
                  color=black,vector([0,0],[A[1,2],A[2,2]]),*/
                  line_width=2,point_size=0.5, color=pink,
                  /*points(myABild) ,*/
                   color=red,vector([0,0],[tv[1,1],tv[2,1]]),
                  line_width=4,color=red,
                  points(myBild)
        )$  draw(Bild)$
```

Figure 10:




# 7 Gleitspiegelung

Definition der Translation

(%i243) tx:-1$ ty:-2$

(%i245) tv:transpose(matrix([tx,ty]));

(%o245) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Eins-Abbildung Identität

(%i246) E:matrix([1,0],[0,1]);

(%o246) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i247) f(xv):=E.xv+tv;

(%o247) $\mathrm{f}(xv):=E\ .\ xv+tv$

(%i248) f(xv);

(%o248) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . xv+\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Abbildung eines beliebigen Punktes

```
--> pv:transpose(matrix([px,py]));
```

```
--> f(pv);
```

Nun muss zu jedem dieser Bildpunkte der Translationsvektor addiert werden. Dazu muss man ihn passend "aufblähen" zu einer Transformationsmatrix.

```
(%i249) npk:length(transpose(myUr));
(%o249) 8
```

```
(%i250) mtv(tv):=block ([m],
                    m:tv,for i:1 thru npk-1 do ( m:addcol(m,tv)),return( m))$
```

```
(%i251) mtv(tv);
```

(%o251) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Gesamte Abbildung des Urbildes

```
(%i260) fm(myUr):=Sp(m).myUr+mtv(tv);
```

(%o260) $\mathrm{fm}(myUr):=\mathrm{Sp}(m)\ .\ myUr+\mathrm{mtv}(tv)$

```
(%i261) m:2;
(%o261) 2
```

```
(%i262) myBild:fm(myUr);
        %,numer;
```

(%o262) $\begin{bmatrix} -\frac{11}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -1 & -\frac{11}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -2 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix}$

(%o263) $\begin{bmatrix} -2.2 & -1.4 & -0.8 & 0.8 & 1.4 & -1 & -2.2 & -1.2 \\ -0.4 & 0.2 & -0.6 & 0.6 & -0.2 & -2 & -0.4 & -0.9 \end{bmatrix}$

```
(%i276) Bild:gr2d(xrange = [xmin,xmax], yrange = [ymin,ymax],
                points_joined = true,color=green,
                line_width    = 4,  point_size    = 0.5, point_type    = up_triangle,
                grid=true,points(myUr) ,
                grid=true, line_width=2,point_size=0.5, head_length=0.1,
                /*color=blue,vector([0,0],[Sp(m)[1,1],Sp(m)[2,1]]),
                color=black,vector([0,0],[Sp(m)[1,2],Sp(m)[2,2]]),*/
                line_width=7,point_size=0.5,
                 color="#aa0000",vector([0,0],[tv[1,1],tv[2,1]]),
                line_width=4,color=red,line_width=4,
                points(myBild) ,color="#ff00ff",
                polygon([-1,2],[-2,4]),
                color=pink,points(Sp(m).myUr)
        )$  draw(Bild)$
```

Figure 11: