Lineare Algebra Eigenwerte und Eigenvektoren

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 6. Januar 2006

Ein Vektor heißt Eigenvektor einer Matrix, wenn gilt: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

λ heißt dann Eigenwert. zu $\vec{v}$. $\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = 0$

Da es sich um ein homogenes Gleichungssystem handelt, muss die Determinante des Systems verschwinden , damit es überhaupt nichttriviale Lösungen gibt.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \lambda \end{pmatrix}$$

Die Determinante heißt charakteristisches Polynom

$$\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

.

• A := matrix([[3/2, 1/2], [1/2, 3/4]]);

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\frac{9}{8} - \frac{9}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \left(\frac{9}{8}\right)^2 = -\frac{7}{8} + \frac{81}{64}$$

• ev:=linalg::eigenvectors(A)

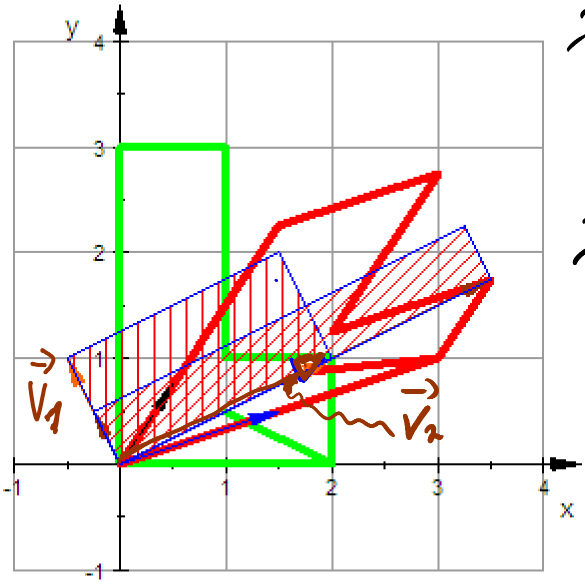
$$\left[\left[\frac{1}{2}, 1, \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[\frac{7}{4}, 1, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

$$\left(\lambda - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

$$\lambda = \frac{9}{8} \pm \frac{5}{8}$$

Vorn stehen die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit $\lambda_1 = \frac{1}{2} \vee \lambda_2 = \frac{7}{4}$

Hinten die Eigenvektoren.



$\lambda_1 = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_x + \frac{1}{2}v_y = 0$

$v_y = 1$ (frei) $\Rightarrow v_x = -\frac{1}{2}$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{7}{4}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{4}v_x + \frac{1}{2}v_y = 0$

$v_y = 1 \Rightarrow v_x = 2$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenvektoren sind $\perp$ aufeinander

Datei abbildungen und Nr 6d