Lineare Algebra Eigenwerte und Eigenvektoren

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 6. Januar 2006

Ein Vektor heißt Eigenvektor einer Matrix, wenn gilt: $\| A\vec{v} = \lambda \vec{v} \|$

λ heißt dann Eigenwert. zu $\vec{v}$.

$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = 0$

char. Polynom

$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 3 \cdot 4 = 0$

$-4 + \lambda^2 - 12 = 0$

$\lambda^2 = 16$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -4$

Eigenwerte

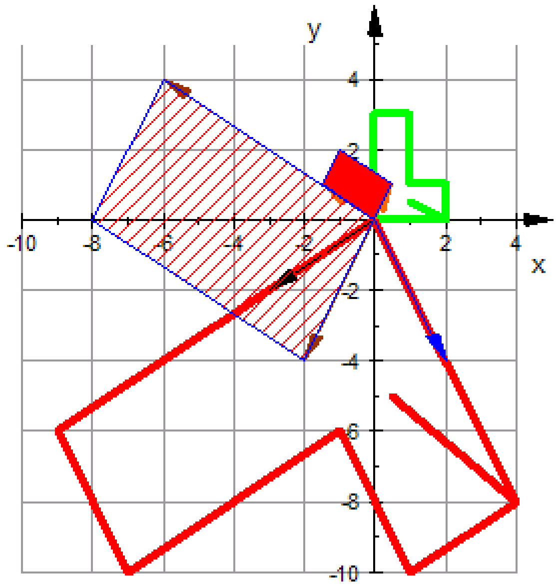
```
• A:=matrix([[2,-3],[-4,-2]])
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

```
• ev:=linalg::eigenvectors(A)
```

$$\left[\left[-4, 1, \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[4, 1, \left[\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

Vorn stehen die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit
Hinten die Eigenvektoren



Bestimmung der Eigenvekt.

$-2v_x - 3v_y = 0$ zu $\lambda_1 = 4$

$v_x = -\frac{3}{2} v_y$, Wahl $v_y = 1$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_2 = -4$

$6 v_x - 3 v_y = 0$; $v_y = 1$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bilden das kleine rote Parallelo= gramm. Dessen Bild ist das gestreifte Parallelogramm.

Weil ein Eigenwert negativ ist, sind die Bilder gegensinnig.

(Einführungs Bspl)(Datei Nr 6)

Lineare Algebra Eigenwerte und Eigenvektoren

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 6. Januar 2006

Ein Vektor heißt Eigenvektor einer Matrix, wenn gilt: $\|\; A\vec{v} = \lambda \vec{v} \;\|$

$\iff (A - \lambda E)\vec{v} = 0$

λ heißt dann Eigenwert. zu $\vec{v}$.

Spiegelung an der Ursprungs-Geraden y=m x

- gw:=arctan(m);

$\arctan(m)$

Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an x-Achse

Dr(φ) Drehmatrix um φ

- Spm:=Dr(gw)*Spx*Dr(-gw)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m^2+1} - \frac{m^2}{m^2+1} & \frac{2\cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2\cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2}{m^2+1} - \frac{1}{m^2+1} \end{pmatrix}$$

Schöne Idee und ein CAS macht die Arbeit.

$$Spm := \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungsmatrix an Gerade y=mx

- ev:=linalg::eigenvectors(A)

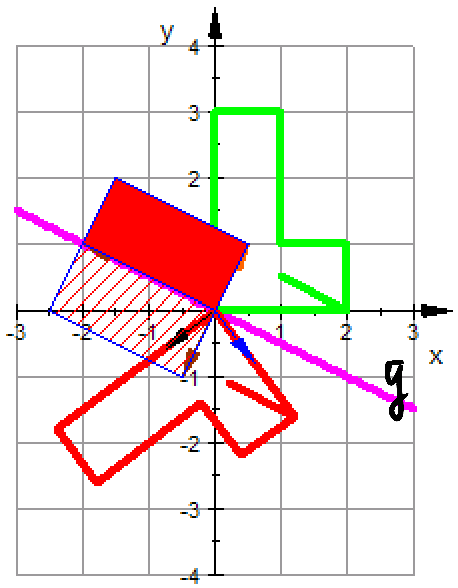
$$\left[\left[\underbrace{-1}_{\text{Spiegelt}}, 1, \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[\underset{\text{Fix}}{1}, 1, \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

$\perp g$ $\quad \parallel g$

hier für $m = -\frac{1}{2}$

Vorn stehen die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit
Hinten die Eigenvektoren.

Die Eigenvektoren zeigen Fixgeraden zu $\lambda = -1$ und Fixpunktgeraden zu $\lambda = 1$



Alle Achsenspiegelungen haben die Eigenwerte -1 und 1.

Es gilt $\det(Spm) = -1$.

zu Datei 7