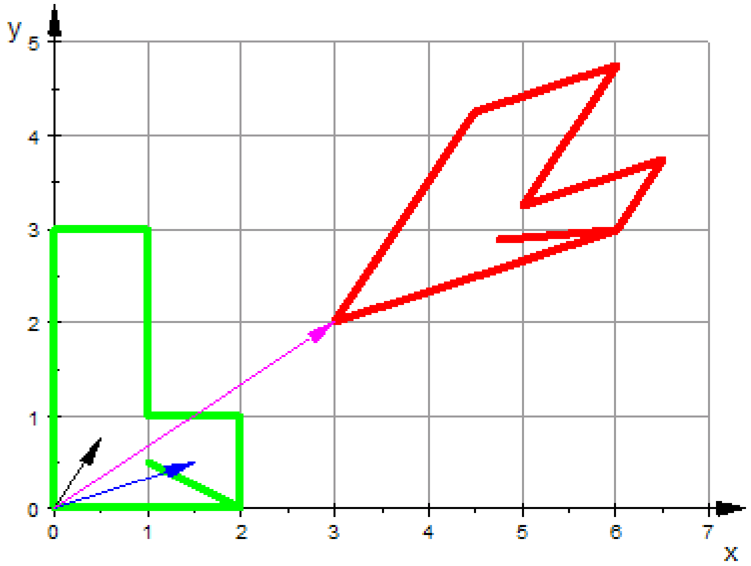
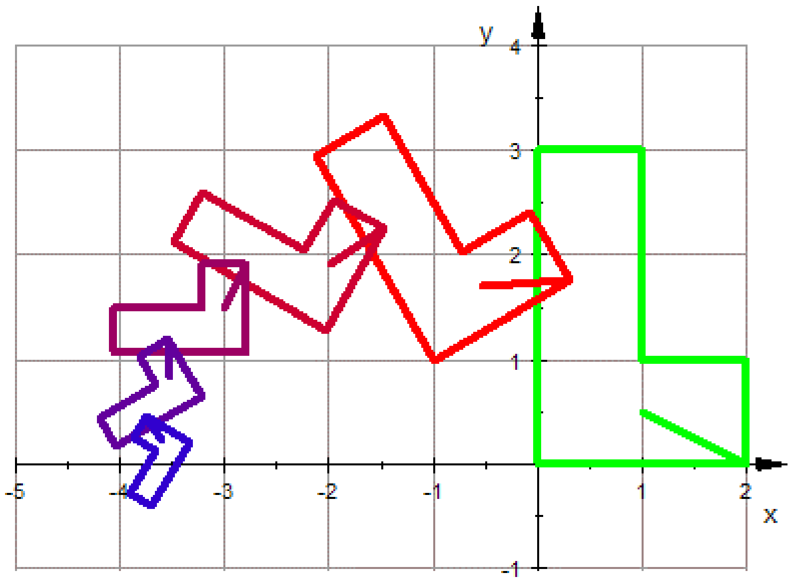
Lineare Abbildungen

Vorlesung Lineare Algebra mit integrierten Übungen WS 12-13
Studiengang LBS Unterrichtsfach Mathematik

Lineare Algebra, Teil 2 Abbildungen

- Lineare Abbildungen
- Lineare Gleichungssysteme
- Eigenwerte, Eigenvektoren
- Hauptachsentransformation





Definitionen von linearer Abbildung, linearer Transformation, affiner Abbildung

Affine Abbildungen

www.mathematik-verstehen.de Haftendorn 2012

Definition: Gegeben sei ein m-dimensionaler Vektorraum VR_m über einem Körper K.

Dann wird mit einer **nxm-Matrix A** mit Elementen aus K eine **lineare Abbildung** in einen n-dimensionalen VR_n definiert durch: $v\_:=A\cdot v$.

Handelt es sich um eine Abbildung eine Vektorraumes in sich selbst, spricht man von **linearer Transformation.** Betrachtet die Vektoren in einem **Punktraum**, so kann noch eine Translation mit dem Vektor tr hinzukommen und die Abbildung

$p\_:=A\cdot v+tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue und Teilverhältnistreue.**

D.h. die Bilder von Parallelen sind wieder Parallelen und Teilungsverhältnisse im Bild sind die gleichen wie im Urbild. (Beweise auf den Vorlesungsfolien)

In diese Datei sind zunächst Urbild- und Bildraum der R^2. Weiter werden erste Schritte im R^3 gemacht. Projektionen sind hier die wichtigen Abbildungen von R^3 auf R^2.

Parallelentreue und Teilverhältnistreue

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\,' \parallel \vec{w}\,'$$

$$\vec{v} = \alpha \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\,' = \alpha \vec{w}\,'$$

Anmerkung: Von Hand (und der Schule) wird meist der Pfeil über Vektoren geschrieben. Bildpunkte und Bildvektoren kennzeichnet man meist mit einem Strich, also v‘. Am TI-Nspire Klappt das beer nicht als Variablenname. Dort wird stattdessen der Unterstrich verwendet, v_

$\vec{v}\,' := A\vec{v}$ Linear: $(\alpha \vec{v})' = \alpha \vec{v}\,'$

$(\vec{v} + \vec{w})' = \vec{v}\,' + \vec{w}\,'$

Beweis $(\alpha \vec{v})' = A(\alpha \vec{v}) = \alpha A \vec{v} = \alpha \vec{v}\,'$

$(\vec{v} + \vec{w})' = A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = \vec{v}\,' + \vec{w}\,'$

Plakativ:

Das Bild des doppelten Vektors ist das Doppelte des Bildvektors.

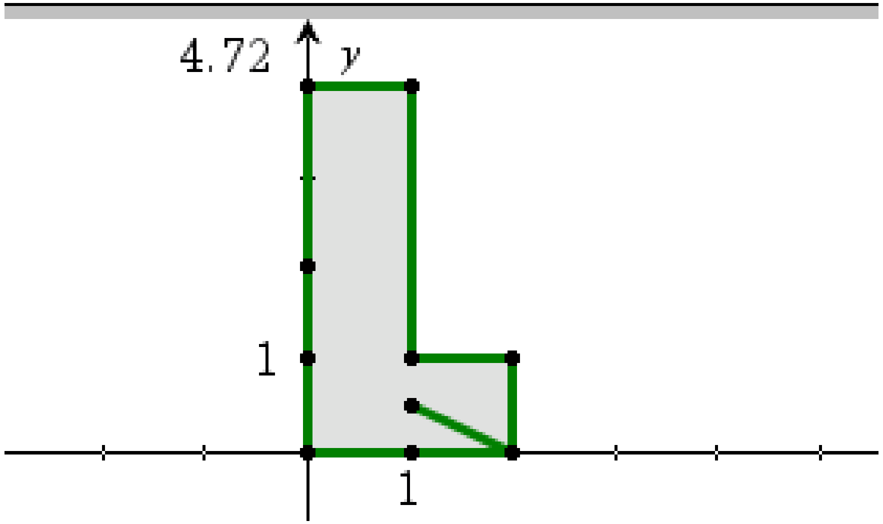
Das Bild einer Summe von Vektoren ist die Summe der Bildvektoren.

Lineare Transformationen des R^2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

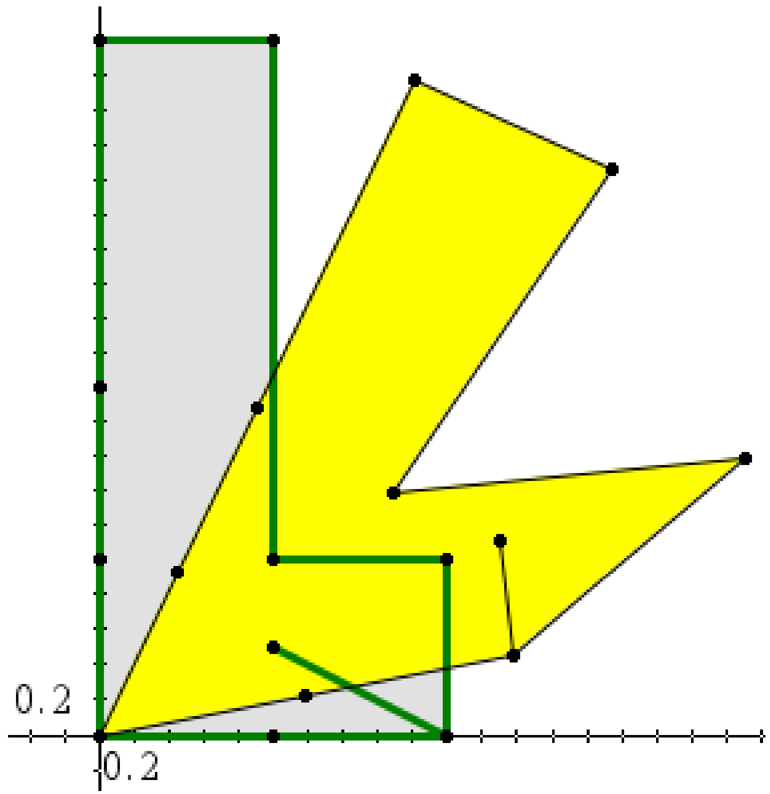
Urbild $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$v' = A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$



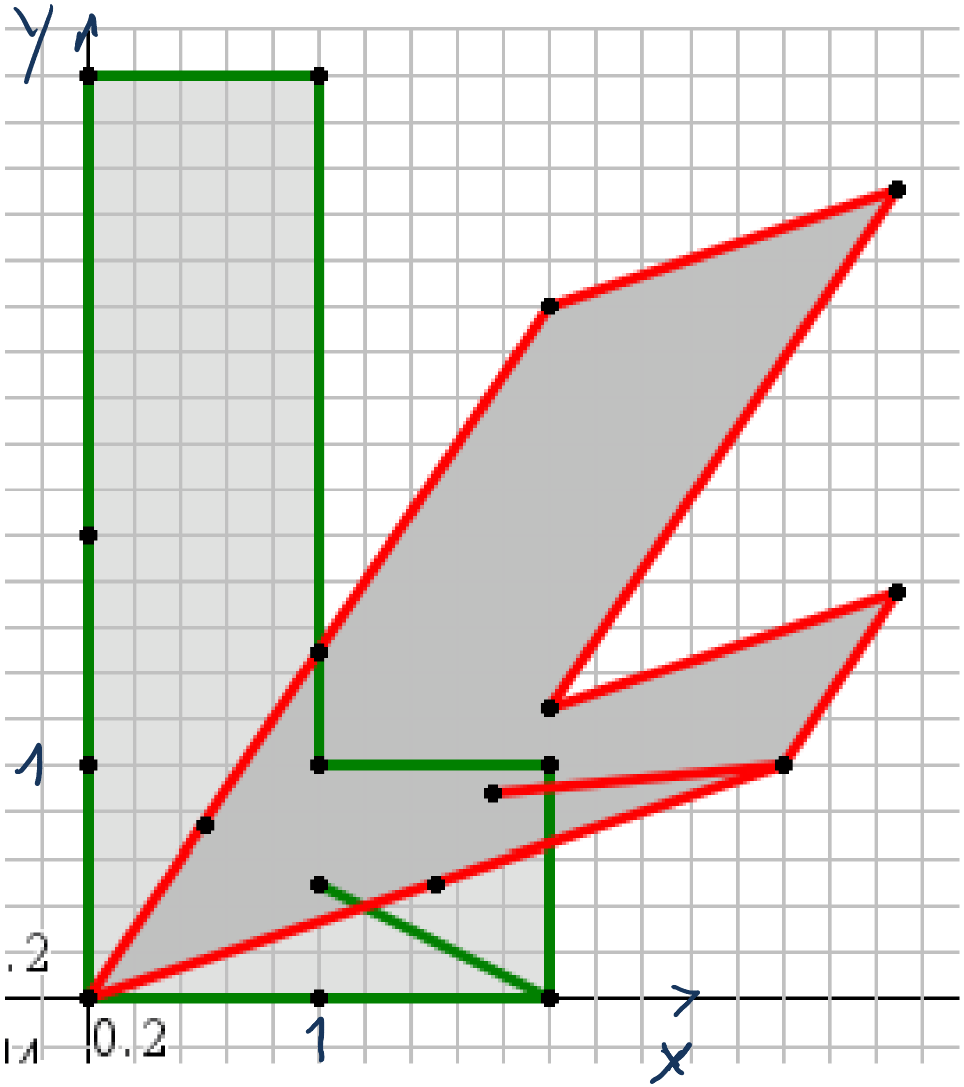
Multipliziert man eine 2x2-Matrix wie A mit der 2x8-Matrix des gesamten Urbildes, erhält man die 2x8-Matrix des gesamten Bildes.
Darum kann man mit geringem Aufwand stets das ganze Urbild-L abbilden.

Parallentreue und Teilverhältnistreue ????????



Zum eigenen Experimentieren gibt es die TI Nspire-Datei auf der Site bei „Abbildungen“.

Parallentreue und Teilverhältnistreue



$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

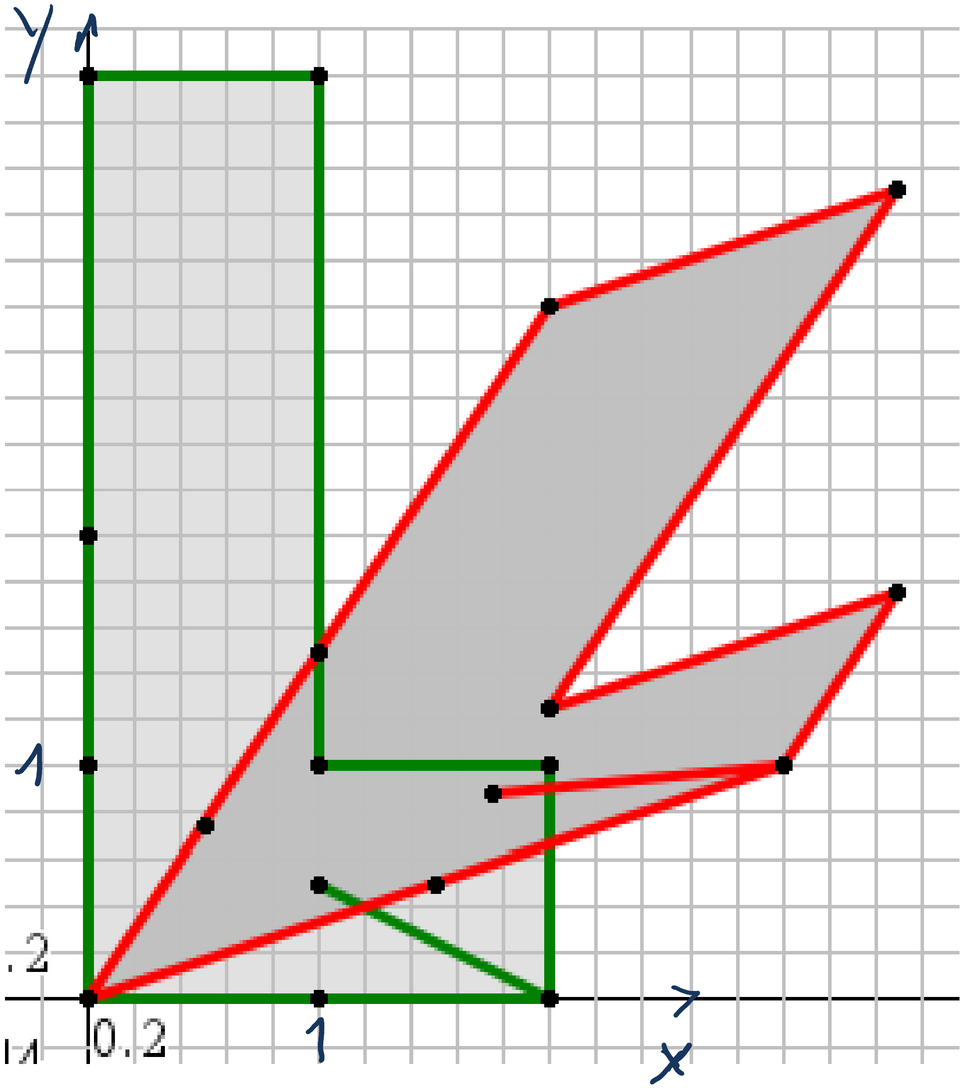
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Parallentreue und Teilverhältnistreue



$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3/2\\1/2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2/4\\3/4\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

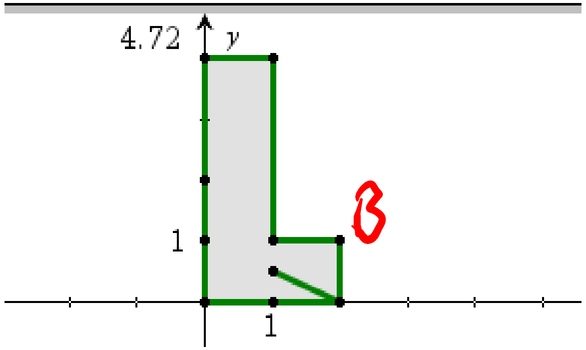
$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 3/4\end{pmatrix}$$

Berechnung der Bildpunkte

Urbild $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$



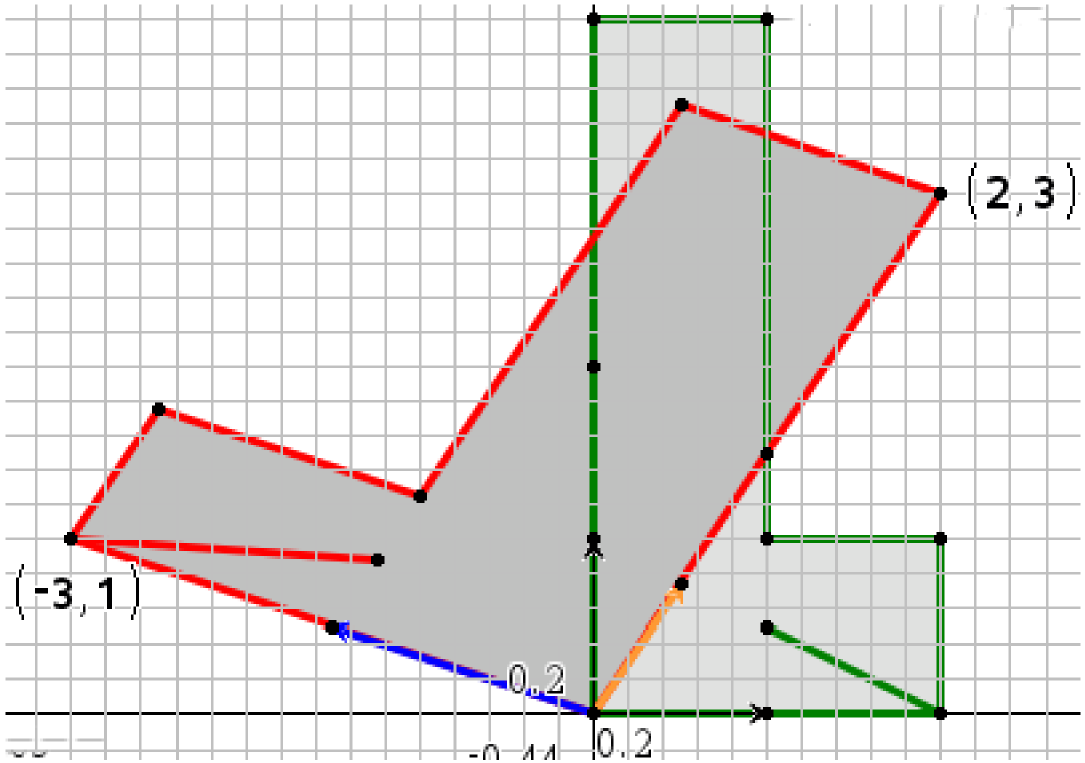
Abbildungsmatrix $\mathbf{aa} := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

$\mathbf{myb} := \mathbf{aa} \cdot \mathbf{myur} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} & 2 & \frac{7}{2} & 2 & 0 & 3 & \frac{7}{4} \\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} & 3 & 0 & 1 & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$

$$b' = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

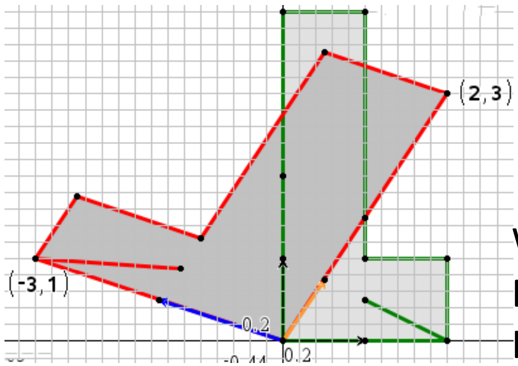
Zum eigenen Experimentieren gibt es die TI Nspire-Datei auf der Site bei „Abbildungen".

Übung: Aufstellung der Abbildungsmatrix



Zum eigenen Experimentieren gibt es die TI Nspire-Datei auf der Site bei „Abbildungen".

Übung: Aufstellung der Abbildungsmatrix



Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix
Sind die Bilder der Einheitsvektoren.

Wegen der Teilverhältnistreue kann man sehen, dass der blaue Vektor Das Bild des x-Achsen-Einheitsvektors ist und der orangefarbene Vektor Ist das Bild des y-Achsen-Einheitsvektors. Daraus folgt:

$$e_1' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad p' = A\,p \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Matrix A ist $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

$$\det(A) > 0 \qquad \det(A) < 0 \qquad \det(A) = \pm 1 \qquad \det(A) = 0$$

Die Abbildung erhält die Orientierung, dreht die Orientierung um, ist Kongruenzabbildung, die Abbildung ist „entartet".

$$|A| = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{8} = -1{,}375$$

Damit wird bestätigt, dass das Bild anders orientiert ist.
Zudem ist der Flächeninhalt um 37,5% größer geworden.

Die Beweise folgen!

Fläche des Bildes und Determinante der Abbildungsmatrix

Satz: Bei einer allgemeinen affinen Abbildung mit der Matrix aa wird das Einheitsquadrat in ein Parallelogramm verwandelt, dessen orientierter Flächeninhalt durch die Determinante von aa gegeben ist.

Beweis: $\mathbf{e1b}:=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ $\mathbf{e2b}:=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ $\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Die Fläche eines Parallelogramms wird berechnet durch $fläche=seite1\cdot seite2\cdot \sin(\alpha)$

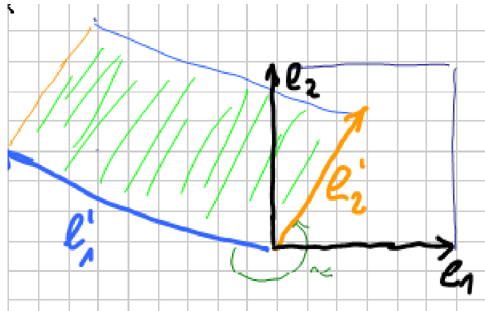
mit dem eingeschlossenen Winkels α. Hier ist $caq=\cos(\alpha)^2$ ist hier

$\mathbf{flq}:=(\mathrm{norm}(\mathbf{e1b}))^2\cdot(\mathrm{norm}(\mathbf{e2b}))^2\cdot(1-caq) \blacktriangleright -(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)\cdot(caq-1)$

$\mathbf{gl}:=(\mathrm{dotP}(\mathbf{e1b},\mathbf{e2b}))^2=(\mathrm{norm}(\mathbf{e1b}))^2\cdot(\mathrm{norm}(\mathbf{e2b}))^2\cdot caq$

$\blacktriangleright (a\cdot b+c\cdot d)^2=(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)\cdot caq$

$\mathbf{lo}:=\mathrm{solve}(\mathbf{gl},caq) \blacktriangleright caq=\dfrac{(a\cdot b+c\cdot d)^2}{(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)}$



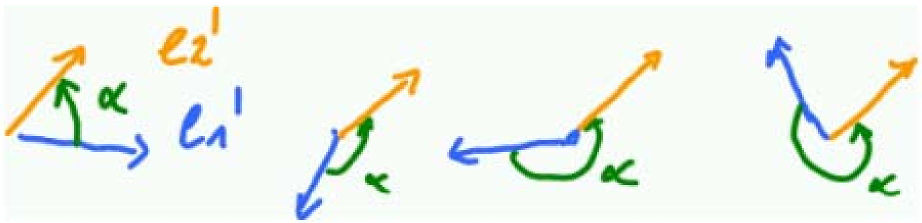
$\mathbf{flaeche}:=\mathbf{flq}|\mathbf{lo} \blacktriangleright a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot c^2$ ⚠ $\mathrm{factor}(\mathbf{flaeche}) \blacktriangleright (a\cdot d-b\cdot c)^2$

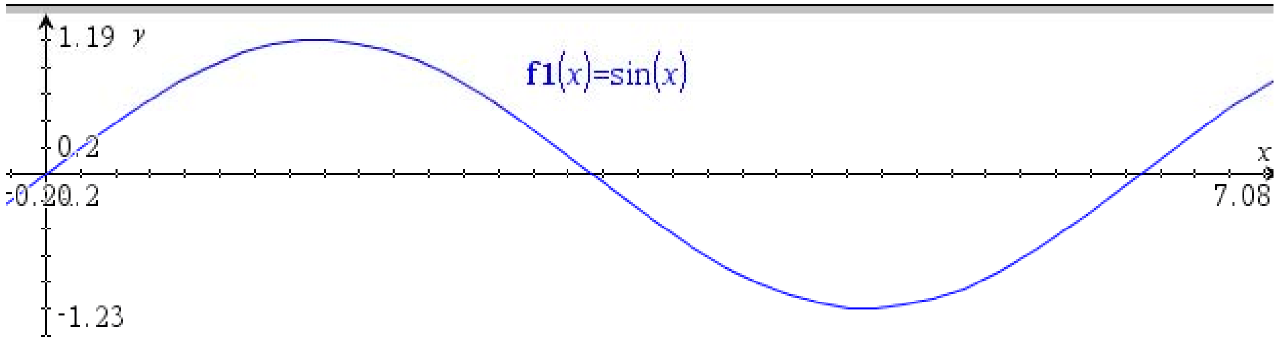
$(\det(\mathbf{aa}))^2 \blacktriangleright (a\cdot d-b\cdot c)^2$ ⚠

Fläche des Bildes und Determinante der Abbildungsmatrix

Nachzudenken bleibt über das Vorzeichen $\mathit{fläche} = \mathit{seite1} \cdot \mathit{seite2} \cdot \sin(\alpha)$

Offenbar ist der Sinus gerade dann negativ, wenn die Abbildung die Orientierung umkehrt. O.B.d.A. $\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}\right) = a$ Daran sieht man, dass die Determinante auch genau für umgekehrte Orientierung negativ wird.





Für $p' = A \cdot p$ gibt $\det(A)$ **den Faktor für die Flächenänderung an.**
Im negativen Fall ist die Orientierung umgekehrt.

Kongruenzabbildungen

Definition: Eine **Kongruenzabbildung** ist eine längentreue Abbildung des Raumes auf sich selbst.

In der Schule sagt man auch „Deckabbildungen“. *Siehe Geometrie*

Sie sind wegen der Längentreue auch winkeltreu und flächentreu.

Satz: Eine Kongruenzabbildung ist eine affine Abbildung

$$p' = A \cdot p + tr \qquad \text{mit} \qquad \det(A) = \pm 1$$

Beweis: Wegen der Längen- und Winkeltreue sind Kongruenzabbildungen auch parallelentreu und teilverhältnistreu, also affine Abbildungen. Da die Determinante die Flächenänderung beschreibt, kommt nur +1 für gleichsinnige und -1 für gegensinnige Kongruenzabbildungen infrage.

- Gleichsinnige K.A. : Translation und Drehung

$$A = E\_matrix \quad bzw. \quad tr = 0, A = D_\alpha$$

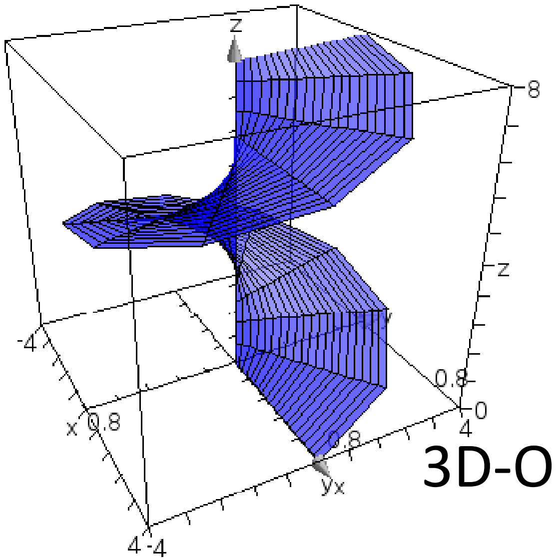
$$A\ speziell, tr = 0\ bzw. \quad tr \neq 0,\ A\ speziell$$

- Gegensinnige K.A.: Achsenspiegelung und Gleitspiegelung

Kongruenzabblidungen

Für $p' = A \cdot p$ gibt $\det(A)$ **den Faktor für die Flächenänderung an.**
Im negativen Fall ist die Orientierung umgekehrt.

Projektionen



$$xp1(t,u) = u \cdot \cos(t)$$
$$yp1(t,u) = u \cdot \sin(t)$$
$$zp1(t,u) = t$$

3D-Objekte kommen zuhauf am Computer vor.

Aber sie werden alle auf dem ebenen Bildschirm dargestellt.
Dafür sorgen Umrechnungen mit Projektions-Matrizen.

Wir beschränken uns hier auf Parallelperspektive, Zentralperspektive hat aufwendigerere Abbildungsgleichungen.

$$p' = A \cdot p \quad \text{gilt: } A = \begin{pmatrix} e1x & e2x & e3x \\ e1y & e2y & e3y \end{pmatrix}$$

P ist 3-dimensional,
p‘ ist 2-dimensional

Projektionen

Projektionen, Haftendorn2013

Alle 3D–Ansichten am Computer sind Projektionen vom 3D–Raum in die 2D–Ebene

$\mathbf{ex}:=\frac{-1}{2} \blacktriangleright \frac{-1}{2}$ $\mathbf{ey}:=\frac{-1}{2} \blacktriangleright \frac{-1}{2}$ Richtung der x–Achse, Kavalliersperspektive z oben, y rechts

Allgemein $\mathbf{projc}:=\begin{bmatrix} exx & 1 & 0 \\ eyy & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} exx & 1 & 0 \\ eyy & 0 & 1 \end{bmatrix}$, speziell $\mathbf{proj}:=\begin{bmatrix} \mathbf{ex} & 1 & 0 \\ \mathbf{ey} & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

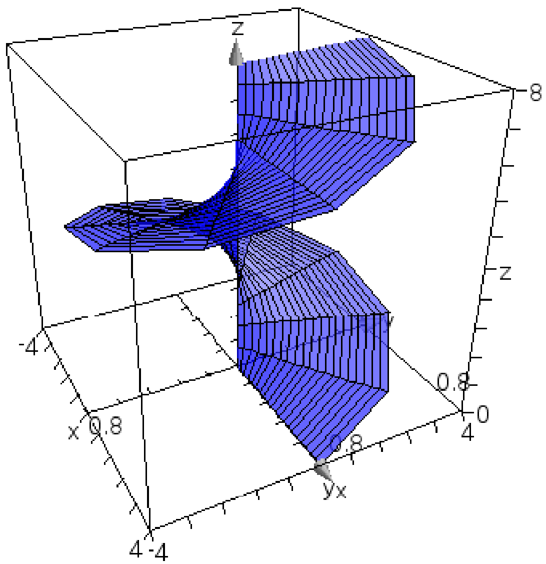
Allgemein $\mathbf{projc}\cdot\begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} exx\cdot xp+yp \\ eyy\cdot xp+zp \end{bmatrix}$ speziell $\mathbf{proj}\cdot\begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} yp-\frac{xp}{2} \\ zp-\frac{xp}{2} \end{bmatrix}$

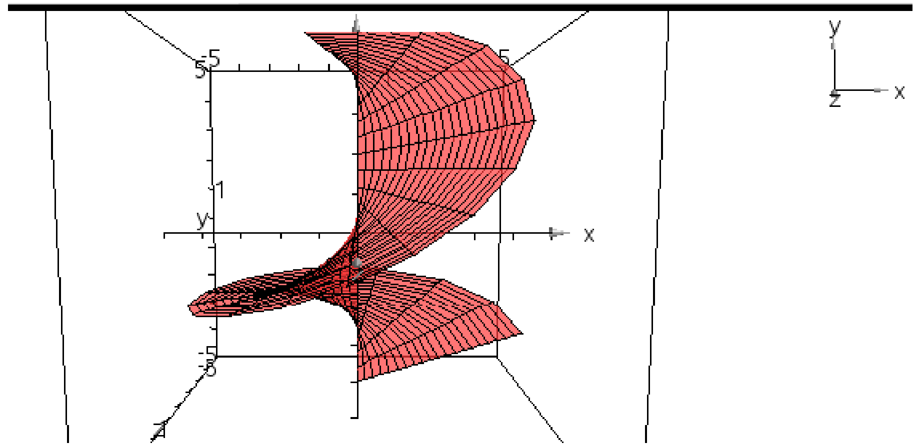
Definition von xp1(t,u), yp1(t,u), zp1(t,u) in der 3D–Ansicht, parametrisch

$\mathbf{xb}(t,u):=\mathbf{ex}\cdot\mathbf{xp1}(t,u)+\mathbf{yp1}(t,u) \blacktriangleright$ *Fertig* *konkret* $\mathbf{xb}(t,u) \blacktriangleright \sin(t)\cdot u-\frac{\cos(t)\cdot u}{2}$ *Bild parametrisch*

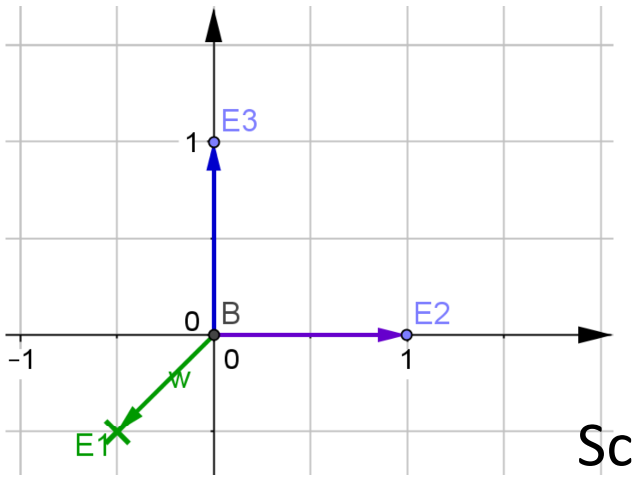
$\mathbf{yb}(t,u):=\mathbf{ey}\cdot\mathbf{xp1}(t,u)+\mathbf{zp1}(t,u) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{yb}(t,u) \blacktriangleright t-\frac{\cos(t)\cdot u}{2}$ *Bild mit zb(t,u)=0 (im Heft z.B.)*

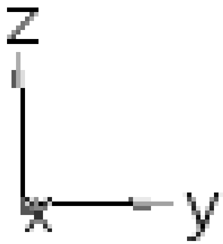
Projektionen

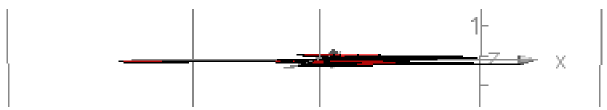




Achtung TI-Datei ansehen







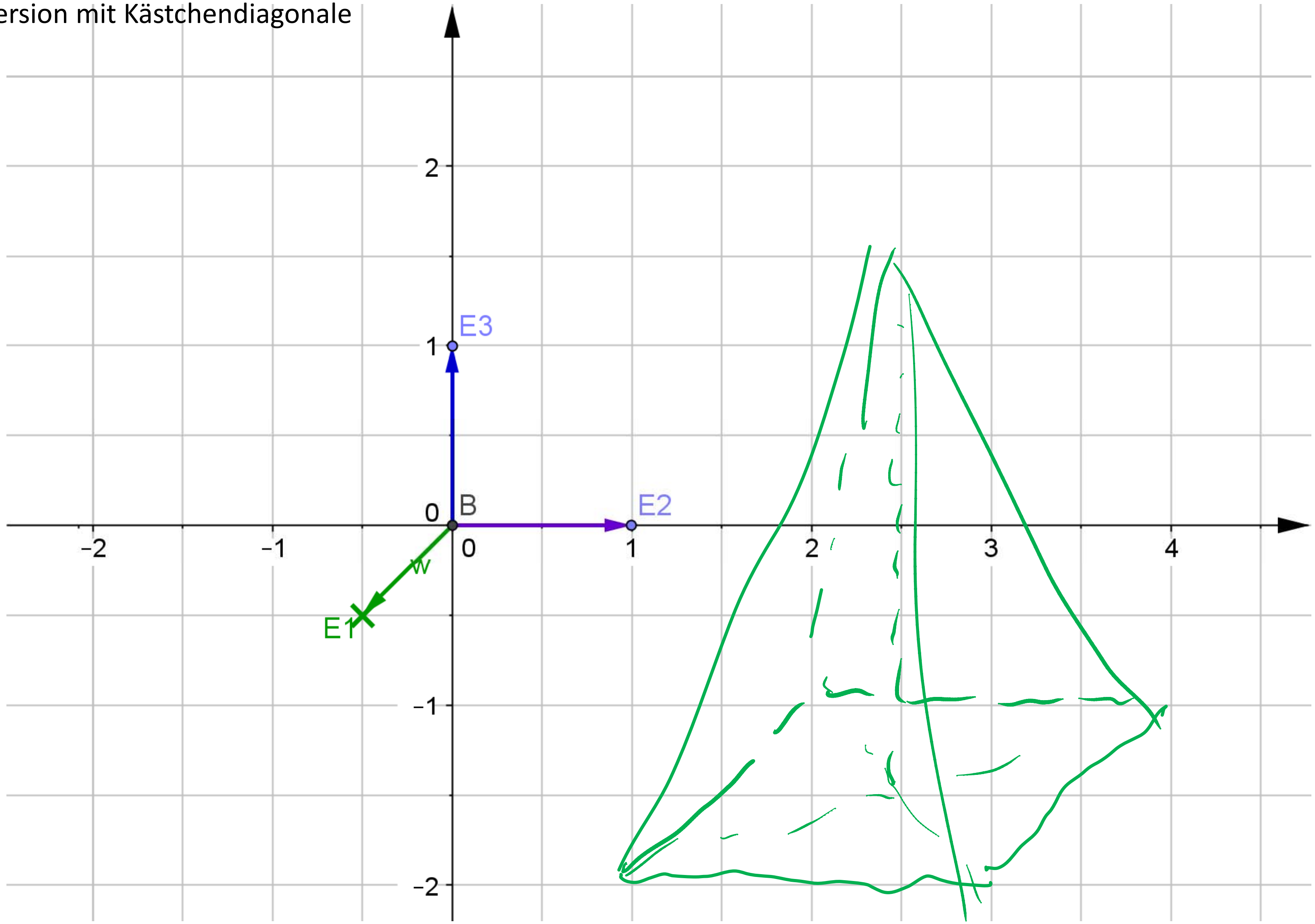
Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale

Projektionen

Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale

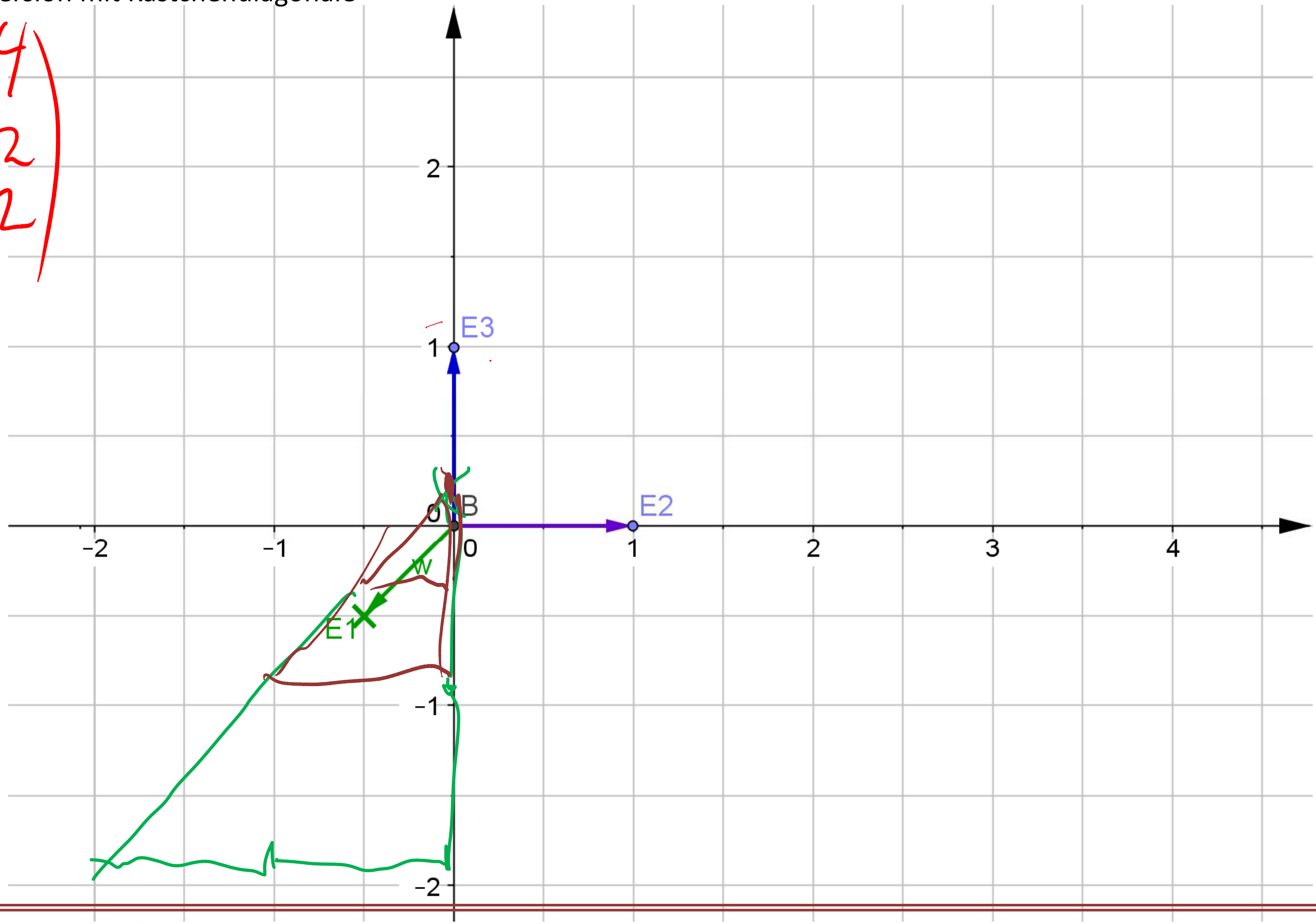


Projektionen

Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale

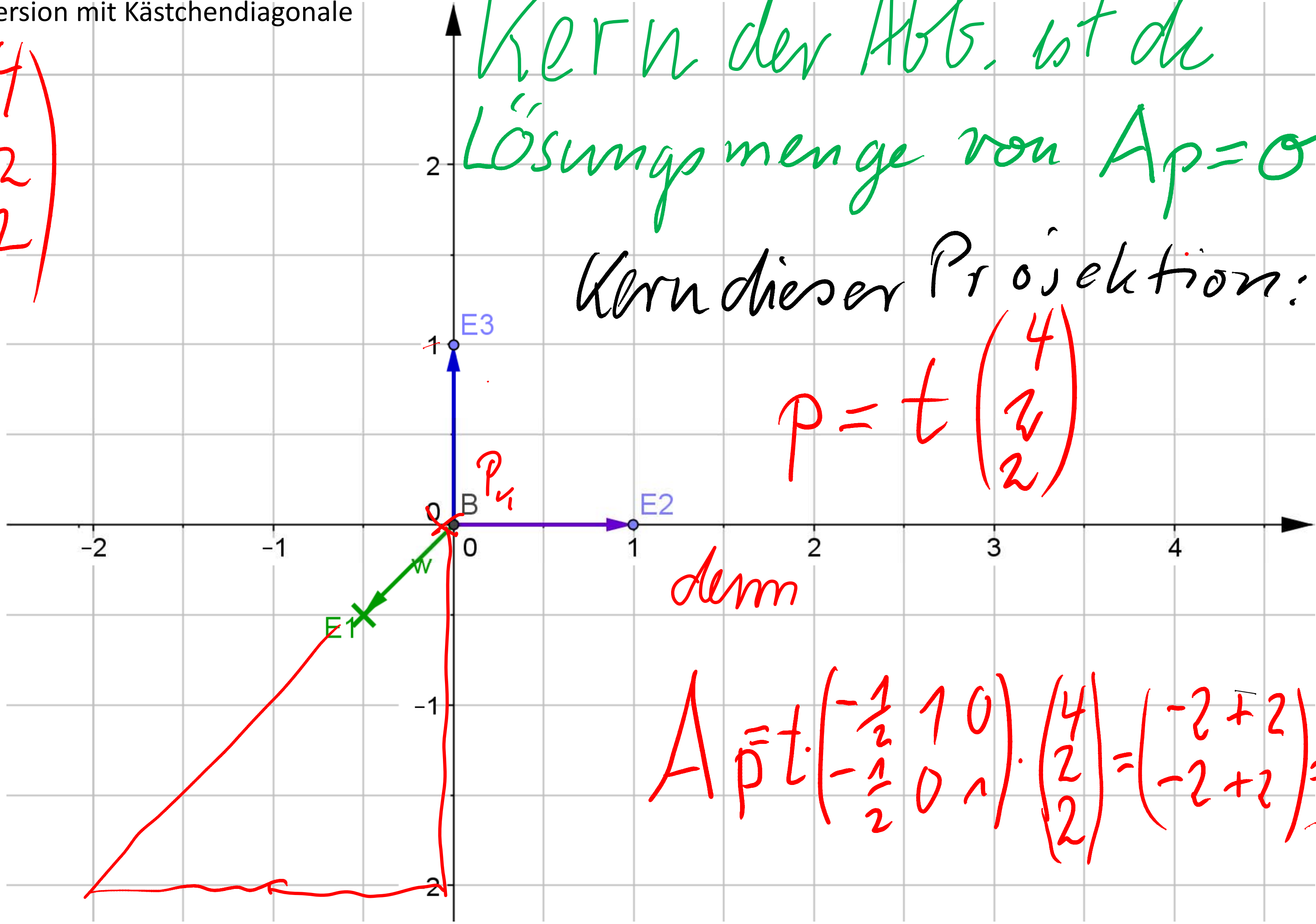
$$P_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Projektionen

Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale



$P_{k_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kern der Abb. ist die Lösungsmenge von $Ap = 0$

Kern dieser Projektion:

$p = t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

denn

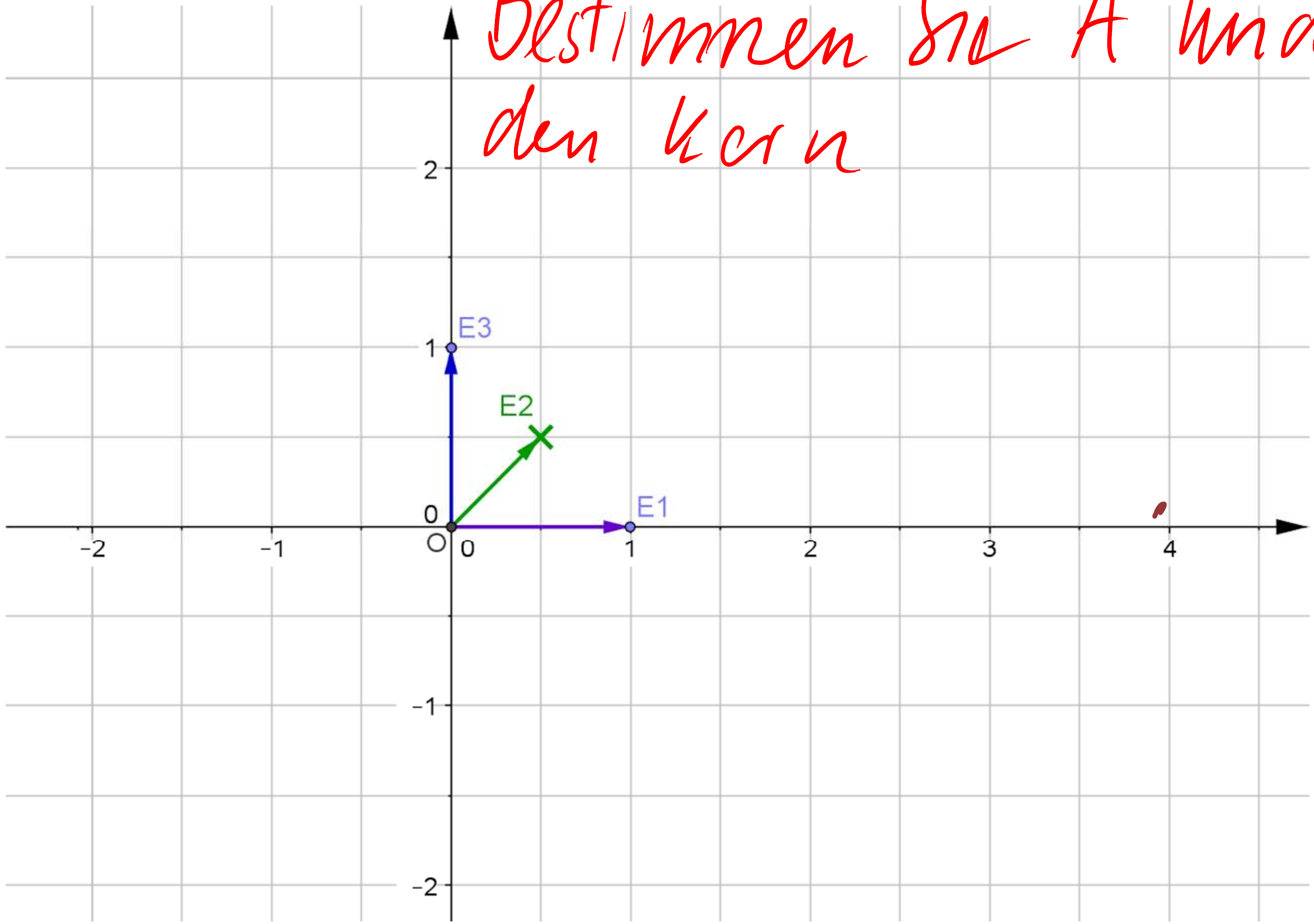
$A\vec{p} = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Projektionen

Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale

Bestimmen Sie A und den Kern



Projektionen

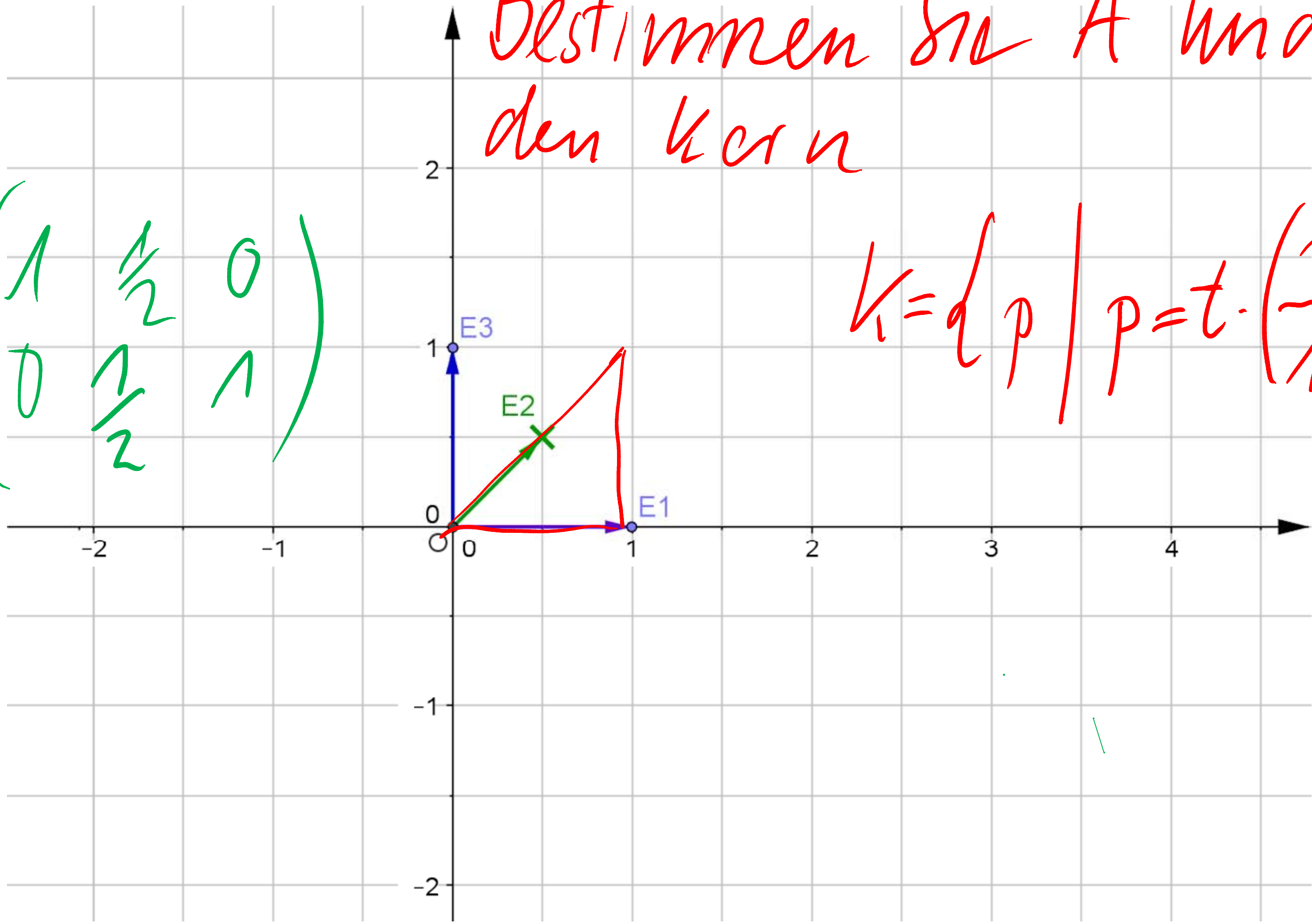
Axonometrische Darstellung 0.5:1:1

Schulische Version mit Kästchendiagonale

Bestimmen Sie A und den Kern

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ p \;\middle|\; p = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Gleichungssysteme

- Der **Kern einer Abbildung** ist die Menge aller Punkte des Urbild-Raumes, die als Bild den Nullvektor des Bildraumes haben.
- Der Kern einer Abbildung ist das Urbild des Nullvektors.
- Die **Dimension des Kerns** ist die Differenz der Dimensionen von Urbild und Bild. Die Dimension des Kerns heißt **Defekt von A.**
- Bei einer Projektion von 3D-Raum auf einen 2D-Raum ist der Kern eine Gerade (Dimension 1). Sie heißt **Verschwindungsgerade**.
- Ein Gleichungssystem lässt sich in der Form $A \cdot p = b$ schreiben.
- Ist A eine mxn-Matrix hat es m Zeilen und n Spalten.
- Ist m < n, heißt das System **unterbestimmt**, ein bleiben beim Lösen mindestens n-m Variable unbestimmbar, der Kern ist nicht {0}
- Die Zahl der unbestimmbaren Variablen ist die Dimension des Kerns, sie heißt **Defekt von A**.
- Ist m > n, heißt das System **überbestimmt**. Es sind dann höchstens n Zeilen linear unabhängig.

Gleichungssysteme

- Ist m=n, A also eine quadratische Matrix, dann sind folgende Eigenschaften gleichwertig:

  - Das Gleichungssystem $A \cdot p = b$ ist eindeutig lösbar
  - A invertierbar, d.h. A^{-1} existiert
  - Die Lösung ist $p = A^{-1}b$
  - Die Determinante von A ist ungleich Null $\det(A) \neq 0$
  - Der Kern besteht ausschließlich aus dem Nullvektor.
  - Der Defekt der Matrix ist 0.
  - Alle n Zeilen von A sind linear unabhängig, diese Zahl heißt **Rang.**
  - Der **Rang von A ist n.**
  - Der Rang der **Erweiterten Matrix ist n**

$$A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme

- Der Zeilenrang ist die Zahl der linear unabhängigen Zeilen.
- Satz: Zeilenrang=Spaltenrang, daher kurz **r=Rang.**
- Wenn der Rang der Matrix A gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist, dann ist das System lösbar, **konsitent**
- Man erkennt den Rang in der Zeilenstufenform an der Zahl der führenden Einsen.
- Haben

$$A \quad \text{und} \quad A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

verschiedenen Rang, d.h. gibt es eine Zeile 0...0 1 in der Zeilenstufenform der erweiterten Matrix, dann ist das System unlösbar, es heißt **inkonsitent**, die Lösungsmenge ist leer
- Satz: Rang + Defekt=Spaltenzahl

Gleichungssysteme

$A \cdot p = b$

$$A \quad \text{und} \quad A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

5×3

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 3$
$d = 0$
$\dim(\mathbb{L}) = 0$

Pkt, eind. Lö. konsistent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$r = 2$
$d = 1$
$\dim(\mathbb{L}) = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 3 \neq r_e = 4$

$\mathbb{L} = \emptyset$

Gleichungssysteme

$A \cdot p = b$

$$A \quad \text{und} \quad A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$r = 3 \quad r_e = 3$

$d = 2$

$\dim(\mathbb{L}) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 1 \neq r_e = 2$

$d = 4$

$\mathbb{L} = \emptyset$

$r = 2 = r_e = 2$

$d = 3$

$\dim(\mathbb{L}) = 3$

Gleichungssysteme

Gleichungssysteme $A \cdot p = b$ Haftendorn Jan 2013

$$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{bv}:=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{aaerw}:=\mathrm{augment}(\mathbf{aa},\mathbf{bv}) ▸ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{solve}\left(\mathbf{aa}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix}=\mathbf{bv},x,y,z,u,v\right) ▸ x=\frac{-(14\cdot \boldsymbol{c3}-9\cdot \boldsymbol{c4}+55)}{3} \text{ and } u=\frac{-(\boldsymbol{c3}-4)}{3} \text{ and } v=5 \text{ and } y=\boldsymbol{c4} \text{ and } z=\boldsymbol{c3}$$

$$\mathbf{aaerw} ▸ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{rref}(\mathbf{aaerw}) ▸ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -14 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

An der Zeilenstufenform, die man mit rref(Aerweitert) erreicht, kann das Lösungsverhalten ablesen. dim(aa) ▸ $\{4,5\}$. Daran sieht man schon, dass mindestens einen (5−4=1) Variable nicht bestimmbar ist.

rang(aa)=3 =rang(aaerw), da es 3 linear unabhängige Zeilen gibt.

defekt(aa)=2, denn 2 Variable sind nicht bestimmbar. Ich hätte dafür y und u gewählt, da die zuhörigen Spalten keine 1 haben.

Gleichungssysteme

$\mathrm{rref}(\mathbf{aaerw}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -14 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Von unten nach oben deuten: v=5

z=−3 u+4 und dann x=3 y+14 u−37 Lösung mit r=y unc s=u

$\mathbf{p1} := \begin{bmatrix} -37 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \cdot r + 14 \cdot s - 37 \\ r \\ 4 - 3 \cdot s \\ s \\ 5 \end{bmatrix}$ Die Lösung ist also 2−dimensional.

Berechnung des Kernes: Die letzte Spalte der obigen Matrix ist dann 0.

Dann folgt v=0 z=−3 u und x=3 y +14 u

Also $k = r \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Die Richtungsvektoren der Lösung sind immer auch die Richtungsvektoren

des Kerns. Damit haben **Kern die Dimension 2, die man Defekt von aa nennt**. Es gilt:

rang(A)+defekt(A)=Spaltenzahl(A) 3+2=5

Gleichungssysteme

$$\mathbf{aat}:=\mathbf{aa}^{T} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{cv}:=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

GLS **überbestimmt**, rang(aat)=3 defekt(aat)=1

$$\mathrm{rref}(\mathbf{aat}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{aaterw}:=\mathrm{augment}(\mathbf{aat},\mathbf{cv}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(\mathbf{aaterw}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zwei Zeilen 0, passt, **lösbar** **Kern** $\mathbf{p}:=\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ Probe: $\mathbf{aat}\cdot\mathbf{p} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lösung $\mathbf{pl}:=\begin{bmatrix} r+1 \\ -1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r+1 \\ -1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix}$ letzte Spalte + Kern Probe: $\mathbf{aat}\cdot\mathbf{pl} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ das ist wirklich cv

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung

Lineare Algebra Eigenwerte und Eigenvektoren

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 6. Januar 2006

Ein Vektor heißt Eigenvektor einer Matrix, wenn gilt: $\| A\vec{v} = \lambda \vec{v} \|$

$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = 0$

λ heißt dann Eigenwert. zu $\vec{v}$.

char. Polynom

- `A:=matrix([[2,-3],[-4,-2]])`

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 3 \cdot 4 = 0$$

$$-4 + \lambda^2 - 12 = 0$$

$$\lambda^2 = 16$$

- `ev:=linalg::eigenvectors(A)`

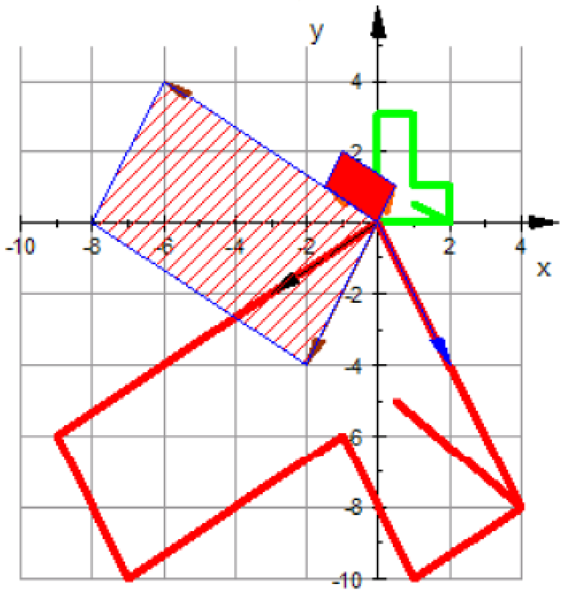
$$\left[\left[-4, 1, \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[4, 1, \left[\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -4$

Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren



Bestimmung der Eigenvekt.

$-2v_x - 3v_y = 0$ zu $\lambda_1 = 4$

$v_x = -\frac{3}{2} v_y$, Wahl $v_y = 1$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 4} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = -4$

$6v_x - 3v_y = 0$; $v_y = 1$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-4)} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bilden das kleine rote Parallelogramm. Dessen Bild ist das gestreifte Parallelogramm.

Weil ein Eigenwert negativ ist, sind die Bilder gegensinnig.

(Einführungs Bspl)(Datei Nr 6)

Eigenwerte und Eigenvektoren

Spiegelung an der Ursprungs-Geraden y=m x

```
• gw:=arctan(m);
```

$\arctan(m)$

```
• Spm:=Dr(gw)*Spx*Dr(-gw)
```

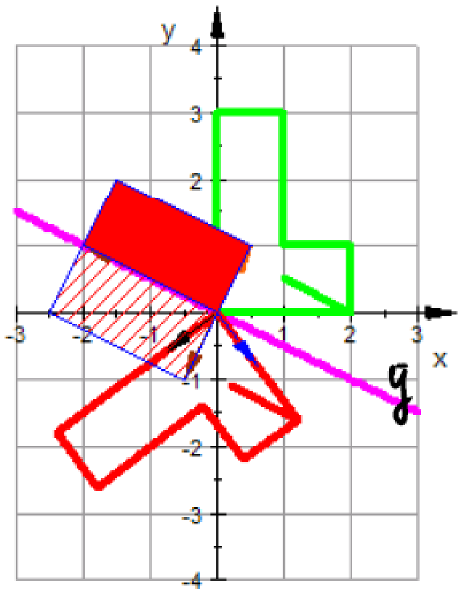
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m^2+1}-\frac{m^2}{m^2+1} & \frac{2\cdot m}{m^2+1} \\ \frac{2\cdot m}{m^2+1} & \frac{m^2}{m^2+1}-\frac{1}{m^2+1} \end{pmatrix}$$

Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an x-Achse

$Dr(\varphi)$ Drehmatrix um φ

✓ Schöne Idee

o und ein CAS macht die Arbeit.



Eigenwerte und Eigenvektoren

$$Spm := \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungsmatrix an Gerade $y=mx$

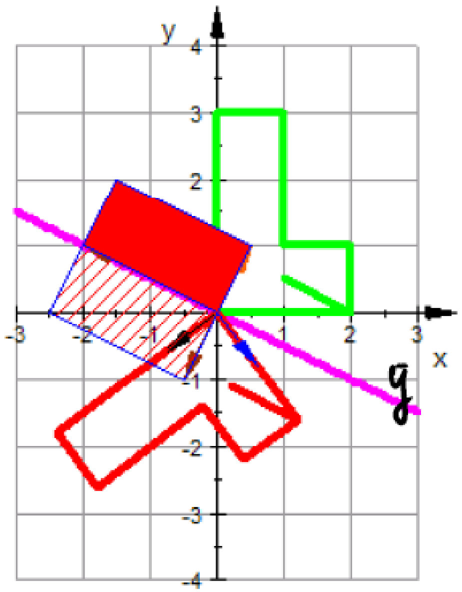
- ev:=linalg::eigenvectors(A)

$$\left[\left[\underbrace{-1}_{\text{Spiegelt}}, 1, \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[1, 1, \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

hier für $m=-\frac{1}{2}$

Spiegelt ⊥g Fix ∥g

Vorn stehen die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit
Hinten die Eigenvektoren.



Die Eigenvektoren zeigen Fixgeraden zu $\lambda=-1$ und Fixpunktgeraden zu $\lambda=1$

Alle Achsenspiegelungen haben die Eigenwerte -1 und 1.
Es gilt $\det(Spm)=-1$.