Inhaltsverzeichnis

Aufgabenverzeichnis

1 Einleitung

2 Werkzeugkasten

Übersicht

2.1 Wie entsteht eine Kurve geometrisch?

2.2 Was bedeuten Gleichungen mit x und y?

2.2.1 Punkte und Geraden

2.2.2 Kreise und Grundlegendes

2.2.3 Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung

2.3 Was sind Polarkoordinaten?

2.3.1 Polarkoordinaten lesen und verstehen

2.3.2 Polarkurven

2.3.3 Zeichnen von Polarkurven

2.3.4 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven

2.4 Was ist eine Parameterdarstellung?

2.4.1 Schnelle Zeichnung von Parameterkurven

2.4.2 Parameterdarstellung doppelt-kartesisch

2.4.3 Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung

2.4.4 Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?

2.5 Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?

2.5.1 Was ist eine algebraische Kurve?

2.5.2 Was ist eine transzendente Kurve?

2.6 Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?

2.6.1 Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?

2.6.2 Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen

2.7 Tipps für GeoGebra

2.7.1 Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?

2.7.2 Wichtige Tipps für Kurven

2.7.3 Was (noch) nicht geht in GeoGebra

2.8 Tipps zu weiterer Mathematik-Software

2.8.1 Tipps für CAS-Taschenrechner

2.8.2 Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica

2.8.3 Tipps für Programme zur Raumgeometrie

2.8.4 Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme

2.8.5 Blick zurück und nach vorn

3 Klassische Kurven ohne Ende

Übersicht

3.1 Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten

In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.1.1 Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen
Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung der Hundekurven-Gleichung
$(x^2 + y^2) \cdot (y - a)^2) = k^2y^2$ (Gl.3.1)?

a) $(x + y)^2 \cdot (y - a)^2 = k^2y^2$ b) $(x^2 + y^2) \cdot (y^2 - a^2) = k^2y^2$

c)$x^2(y - a)^2 = y^2(k^2 - (y - a)^2)$ d) $(k + y - a)(k - y + a)y^2 = (x \cdot (y - a))^2$

e) $x^2y^2 = (y + a)^2(k^2 - y^2)$

Hinweis
Beachten Sie, dass sich Strichrechnung und Quadrierung nicht gut vertragen. Die dritte binomische Formel ist für d) nützlich. Gleichung e) zeigt zwar die verschobene Hundekurve, aber es ist keine zulässige Gleichungsumformung. ◀

Lösung Die gemeinte Hundekurve $(x^2 + y^2) \cdot (y - a)^2) = k^2y^2$ ist rot dargestellt. In den folgenden Bilder ist $a = 0.4$ und $k = 1.6$. Die zu testenden Kurven tragen den Index k.

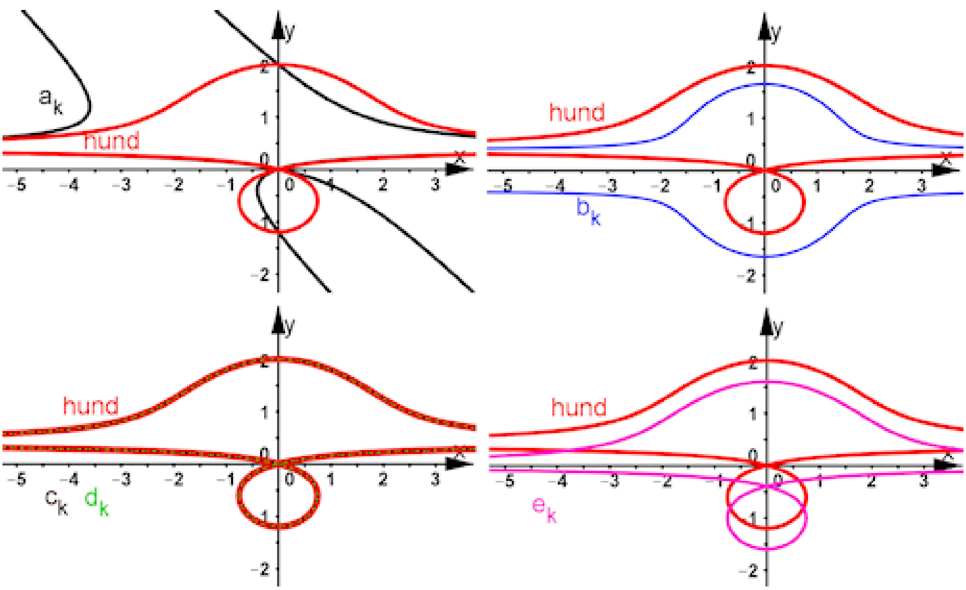

Abb. 3.1 Afg. 3.1 a_k und b_k passen gar nicht. Die Gleichungen sind **sicher falsch** umgeformt.Es ist e_k eine verschobene Hundekurve, aber e) ist keine erlaubte Gleichungsumformung (s.u.). Die Kurven c_k und d_k liegen in diesem Fenster auf der Kurve. Das bleibt auch bei Variation von a und k so. Ein rechnerischer Beweis steht unten.

Fehler für a) und für b) : Binomische Formeln sind nicht beachtet.

Beweis: c_k ist die Hundekurve: In Gl. 3.1 linke Klammer auflösen und $y^2(y-a)^2$ nach rechts bringen, dann y^2 ausklammern.

Beweis: d_k ist die Hundekurve: In c) das Quadrat des linken Produktes nach außen schreiben (Potenzgesetz!). Rechts die äußere Klammer mit der 3. binomischen Formel in zwei Klammern auflösen und in diesen zusammenfassen.

Beweis der Verschiebung: Die y-Achse wird geschnitten bei x=0, also gilt $(y+a)^2(k^2-y^2)$. Also ist der Doppelpunkt bei $y=-a$ und die beiden anderen Schnittpunkte sind bei $y=\pm k$. Wenn es eine Hundekurve sein soll, müsste die Straße nun $y=0$ sein. Eingesetzt in e) ergibt dies $x\cdot 0=a^2k^2$, eine Gleichung, die bei „echten" Konchoiden (d.h. $a\neq 0$ und $k\neq 0$ nicht erfüllbar ist. Damit die die x-Achse als Asymptote bestätigt. Wie verschieben also Gl 3.1 um a nach unten, d.h. $(x^2+(y+a)^2)(y)^2=k^2y^2$, also $x^2y^2=(y+a)^2(k^2-y^2)$, also die Gleichung e). Damit ist bewiesen, dass die lilafarbene Kurve eine verschobene Hundekurve ist.

GeoGebra-Datei afg3.1-terme.ggb

3.1.2 Allgemeine Definition der Konchoiden

3.1.3 Polargleichungen der Konchoiden

In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.1.4 Pascal'sche Schnecken oder die Limaçon

Aufgabe 3.2 Erkunden der Pascal'schen Schnecken

Bedenken Sie: Dies Buch kann zum Erkunden anregen und Verstehen ermöglichen. Nur Sie *selbst* können erkunden und verstehen.

1. Begründen Sie entsprechend Abschnitt **??** die drei Formen der Pascal'schen Schnecken nit Hilfe der polar-kartesischen Darstellung.
2. In Abb. **??** d) sehen Sie eine völlig andere Kurve, weil der Baum B nicht auf dem Kreisrand steht. Überlegen Sie, warum es für eine vollständige Übersicht über mögliche Formen reicht, wenn man $B = (b, 0)$ auf der x-Achse verschiebt. Mit *reicht* ist dabei gemeint, dass man bei einer beliebigen Lage von B irgendwo im Koordinatensystem nur mehr Mühe hat und doch nichts anderes sehen kann, als mit geschickt gewählter Lage. Es reicht sogar $b < a$ zu betrachten. Man formuliert auch: **Ohne Beschränkung der Allgemeinheit**, kurz **o. B. d. A.**, liege B auf der x-Achse links von M.
3. Erarbeiten Sie sich eine solche Übersicht. Überlegen Sie dabei, was Sie als *wesentlich verschieden* ansehen möchten.
4. In jeder Stellung von B könnten Sie auch noch die Leinenlänge k variieren.

Hinweis

Die interaktive Datei finden Sie hier Website zum Buch. Wenn Sie ein schönes Poster mit den Kurvenbildern entwerfen wollen, schalten Sie in GeoGebra die Anzeige der Konstruktionselemente und der Achsen nach Belieben aus. Verwenden Sie z. B.: Export → Grafik-Ansicht in die Zwischenablage. ◀

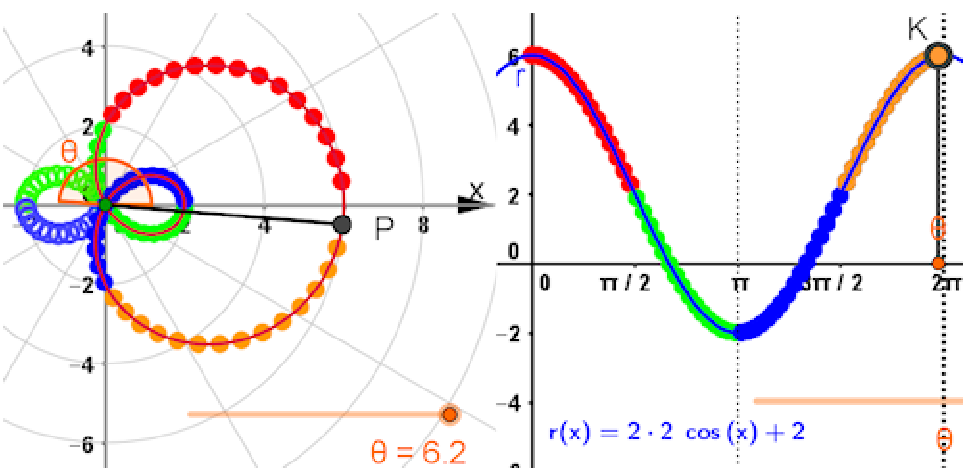

Abb. 3.2 Afg. 3.2 Top 1 Pascal'sche Schnecken polar-kartesisch

Polar-kartesische Darstellung Die Polargleichung der Pascal'schen Schnecken ist $r(\theta) = 2a\ \cos(\theta) \pm k$ (Gl. 3.5). Es handelt sich in der kartesischen Sicht also um eine parallel zur y-Achse verschobene Kosinusfunktion. Die Funktion $\varrho(x) = 2a\ \cos(x)$ erstreckt sich in einem Streifen der Breite $2 \cdot 2a$ um die x-Achse. Wird ein positives k addiert, so schneidet der Graph für $k < 2a$ die x-Achse. Das kartesisch unter der x-Achse gelegene Kurvenstück erzeugt dass eine Schlaufe, sie wird immer kleiner je größer k wird. Im Bild ist $k = 2$ und $a = 2$, der Wanderkreis ist nicht eingezeichnet. Er hat $M = (a, 0)$ und $R = a$.

Ist $k = 2a$, so berührt der Graph der Kosinusfunktion die x-Achse, es entsteht polar die für die Kardioide typische Spitze im Ursprung.

Ist $k > 2a$, so berührt der Graph der Kosinusfunktion die x-Achse gar nicht mehr, es entstehen polar die Pascal'schen Schnecken mit einer „Delle“ links, die den Ursprung nicht mehr erreichen.

Zu Top2, 3 und 4 Wenn Sie die Stellung des Baumes B variieren wollen, So bauen Sie sich eine Datei, mit einem $B = (b, 0)$ verschieblich auf der x-Achse. Z.B. die GeoGebra-Datei afg-pascal.ggb.
Es gibt auch den Sonderfall mit zwei Kreisen Konchoid-Kreis-trivial.ggb.

3.1.5 Formenreichtum der Konchoiden

Aufgabe 3.3 Erkunden von Konchoiden zu allerlei Wanderkurven C.
Sie können das Folgende durchaus in einer einzigen GeoGebra-Datei experimentieren, eine solche finden Sie auf der Website zum Buch.

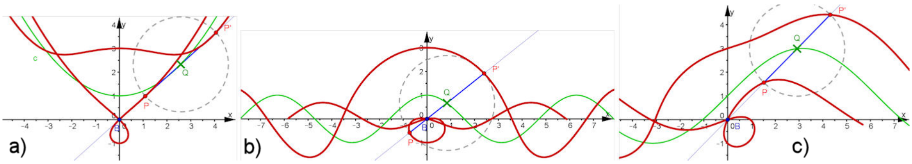

Abb. 3.3 Allgemeine Konchoiden als Anregungen zu Aufgabe 3.3 a) einer Parabel, b) einer Kosinuskurve, c) einer variierten Sinuskurve

Die Variation der Parabel aus Abb. **??** birgt schon viele Überraschungen. Aber Sie brauchen lediglich den Eintrag für die Wanderkurve zu ändern, um ganz eigene Kreationen hervorzubringen. Alle geometrischen Konstruktionselemente sind sofort auf die neue Kurve oder Funktion bezogen.

1. Wählen Sie zunächst andere Leinenlängen k.
2. Wählen Sie andere Höhenlagen a der Parabel.
3. Wählen Sie andere Parabeln. Diese dürfen einen Parameter a enthalten.
4. Geben Sie in GeoGebra die in Abb. **??** gezeigte Gleichung mit Schiebereglern für a und k ein. Achten Sie (über den Eigenschaften-Dialog) darauf, dass a kleine Werte wie z. B. 0.1 annehmen kann. Finden Sie Ihre Lieblingsform.
5. Wählen Sie überhaupt andere Funktionen, wie es in Abb. 3.3 gezeigt ist.

Hinweis
Beachten Sie den Hinweis zu Aufgabe 3.2.
Auch die Herleitung der angegeben Gleichung finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

3.2 Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten

3.2.1 Gerade Strophoide

Aufgabe 3.4 Der Höhenschnittpunkt wandert
Der Text bezieht sich auf Abb. 3.4. Dort sind die Bezeichnungen so gewählt, dass ein Beweis dann leicht fällt. Es ergibt sich eine Strophoide in der Lage von Abb. **??** a). Mit dem Eintragen der Gleichung **??** können Sie das bestätigen.
Beweisen Sie es auch geometrisch durch zusätzliches Eintragen von Konstruktionselementen aus Abb. **??**.
Beweisen Sie es durch Aufstellen der Gleichung für die so erzeugte Kurve.

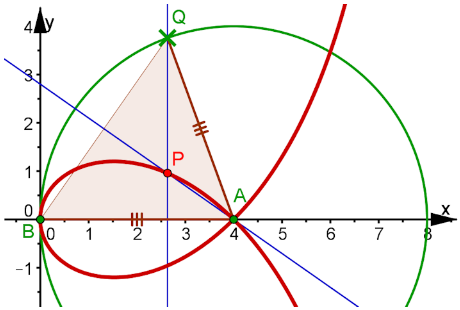

Abb. 3.4 Höhenschnittpunkt im Dreieck
Setze die Punkte $B = (0, 0)$ und $A(a, 0)$ mit beliebigem a.
Schlage um A einen Kreis mit dem Radius $\overline{BA}$ und setze darauf Q zugfest.
Zeichne das Dreieck BAQ und konstruiere zu ihm zwei Höhengeraden.
Gesucht ist die Ortslinie des Höhenschnittpunktes P, wenn Q auf dem Kreis wandert.

Hinweis

Für den geometrischen Beweis ist es hilfreich, Q und die von dort ausgehende Höhe an der Geraden $x = a$ zu spiegeln. Für den algebraischen Beweis verfolgt man die Schritte in Abschnitt **??** und noch die Tipps in Abschnitt **??**. Beide Beweise findet man auf der Website zum Buch, aber versuchen Sie es erst selbst! ◀

3.2.2 Allgemeine Strophoide

3.2.3 Schiefe Strophoide

Aufgabe 3.5 Strophoide zu einer waagerechten Geraden
Wählen Sie als Kurve C die waagerechte Gerade $y = c$ mit $B = (0, 0)$ und $A = (a, 0)$.

1. Konstruieren Sie die zugehörige Strophoide und sehen Sie sich die auftretenden Formen an. Formulieren Sie Ihre Beobachtungen.
2. Warum haben Sie, auch wenn Sie B und A nicht variieren und nur beliebige $c \geq 0$ zulassen, dennoch alle Strophoiden untersucht, bei denen die Kurve C eine Gerade parallel zu BA ist?
3. Raten Sie mit etwas Überlegung eine Asymptote (in Abhängigkeit von c) dieser Strophoiden. Untermauern Sie Ihre Wahl dadurch, dass GeoGebra nur den einen direkt sichtbaren Schnittpunkt mit Ihrer Geraden hat. Welche besondere Lage hat dieser Schnittpunkt?
4. Stellen Sie die drei Gleichungen für Q und P auf (entsprechend Abschnitt **??** oder Abschnitt **??**). Eliminieren Sie u und v. Es geht dieses Mal durchaus von Hand.
5. Überprüfen Sie Ihren Vorschlag für eine Asymptote an der Gleichung.
6. Zeigen Sie, dass die Kurve $C : y = c$ von der Strophoide nie geschnitten wird.
7. Stellen Sie sich selbst Fragen und versuchen Sie wenigstens näherungsweise Antworten zu finden.

Hinweis

Eine interaktive Datei und die Lösungen finden Sie – wie immer – auf der Website zum Buch. ◀

3.2.4 Noch allgemeinere Strophoiden

Aufgabe 3.6 Kreis-Strophoiden
Bei den Pascal'schen Schnecken regt Aufgabe 3.2 das Nachdenken über *wesentliche* Veränderungsmöglichkeiten an. Hier könnten B und A feste Punkte sein und die Form der Strophoide hängt dann von der Lage und Größe des Wanderkreises ab. Nur wegen der Gesamtgröße des Bildes ist in Abb. **??** dennoch a variiert.

1. In Abb. **??** ist B im Ursprung und $A = (a, 0)$. Der Parameter a, der Mittelpunkt M des Wanderkreises und der Radius ϱ erfüllen bei b) $a = 4$, $M = (1.99, 0)$, $\varrho = 2$, bei c) $a = 4$, $M = (2.01, 0)$, $\varrho = 2$ und bei d) $a = 3$, $M = (1.5, 0.5)$, $\varrho = 1$. Dabei sind c) und d) um 90°gedreht dargestellt. Bauen Sie die Konstruktion mit fein steuerbaren Schiebereglern für die Parameter nach und lassen Sie sich von der Formenvielfalt überraschen.
2. Machen Sie sich klar, dass es Geraden gibt, die diese Strophoiden sechsmal schneiden. Also muss die algebraische Gleichung mindestens den Grad 6 haben. Aufstellung einer Gleichung ist mit „Eliminate" möglich – siehe Website – aber der Aufwand lohnt nicht recht. *Hinsehen ist besser.*
3. Der Sonderfall $M = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\varrho = \frac{a}{2}$ zeigt als Ortslinie nur zwei Kreise, sehen Sie sich das an. Die zugehörige Gleichung ist:
   $(x^2 + y^2 - a(x + y)) \cdot (x^2 + y^2 - a(x - y)) = 0$. Sie **zerfällt in zwei Faktoren**. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich die beiden Kreise sind, die man sieht. Sehen Sie sich aber auch an, dass nicht P den einen Kreis und P' den anderen Kreis erzeugt.
   Mehr zu Gleichungen, die in Produkte zerfallen, finden Sie vor allem in Abschnitt 5.3.3.
4. Zeigen Sie durch ein einfaches geometrisches Argument, dass sich mit $M = A$ **immer allgemeine Kreis-Konchoiden** ergeben und dass diese für $\varrho = a$ Pascal'sche Schnecken sind.

3.3 Trisektrix

3.3.1 Die Trisektrix von Maclaurin

3.4 Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten

3.4.1 Die Cissoide des Diokles

3.4.2 Allgemeine Cissoide

3.4.3 Die allgemeine Polargleichung der Cissoide

3.4.4 Die klassischen Kurven als Cissoiden

3.4.5 Geometrie aus der Polargleichung erfinden

3.4.6 Noch allgemeinere Cissoiden

3.5 Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven

4 Barocke Blüten und Früchte

Übersicht

4.1 Versiera, die Hexenkurve

4.1.1 Die (weite) Versiera

4.1.2 Die enge und die weite Versiera

4.1.3 Versiera und ihre Rotation um die x-Achse

4.1.4 Allgemeine Versiera

4.2 Neil'sche Parabel und andere Kubiken

4.2.1 Klassifikation der Kubiken

4.2.2 Graphen der Kubiken vom Typ II. , IV. , III. und I

4.3 Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven

4.3.1 Cassini'sche Kurven konkret

4.3.2 Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für r und r'

4.4 Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen

4.4.1 Bernoulli'sche Lemniskate

4.4.2 Noch mehr Lemniskaten

4.4.3 Gelenke und Stangenkonstruktionen

4.4.4 Konstruktion der Kegelschnitte mit einem Faden

4.4.5 Spezielle Ellipsen-Zirkel und Stangenkonstruktion der Ellipse

4.4.6 Dampfmaschine und andere technische Gelenke

4.4.7 Ausblick

5 Frei erfunden und hoch hinaus

Übersicht

5.1 Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven

5.1.1 Die D-Kurve aus der Einleitung

5.1.2 Die deutsch-$\mathfrak{d}$-Kurve

5.1.3 Die Topfblumen-Kurven

5.1.4 Das gefangene Zweiblatt

5.2 Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven

5.2.1 Term-Sensibilisierung

5.2.2 „Konchoiden“ von Baron de Sluze

5.2.3 Wandelfisch

5.2.4 Mathematik und eigene Erfindungen

5.3 Hoch hinaus in den Raum

5.3.1 Familien der raumverwandten Kurven

5.3.2 Raumflächen durch Rotation der Kurven

5.3.3 Produkte aus Kurven

5.3.4 Klein'sche Quartiken

5.3.5 Quadriken

5.3.6 Harmonie der rotierten Quadriken

5.3.7 Exotische Raumflächen

6 Die unlösbaren Probleme der Antike

Übersicht

6.1 Die Unlösbarkeit

6.1.1 Winkeldritteler, Würfelverdoppler und Kreisquadrierer

6.1.2 Algebra und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

6.2 Beliebige Winkel in n Teile teilen

6.2.1 Winkel dritteln

6.2.2 Konstruierbare Winkel mit natürlichem Winkelgrad

6.2.3 Die Dreiteilung des Winkels mit der Konchoide

6.2.4 Die n-Teilung des Winkels mit der archimedischen Spirale

6.2.5 Winkeldritteln mit der Trisektrix und anderen Kurven

6.3 Würfel verdoppeln, Delisches Problem

6.4 Die konstruierbaren n-Ecke

6.4.1 Das Siebeneck oder Heptagon

6.4.2 Welche n-Ecke sind konstruierbar?

6.5 Kreis quadrieren

6.5.1 π-Konstruktion als neuer Problemtypus

6.5.2 Die Quadratrix

6.5.3 Archimedes, Leonardo da Vinci und Weiteres

6.6 Zirkel, Lineal und Parabellineal

6.6.1 Gleichungen dritten Grades und Quasikonstruktionen

6.6.2 Weitere exakte Konstruktionen mit Parabellineal

6.7 Archimedes und die Quadratur der Parabel

7 Kegelschnitte

Übersicht

7.1 Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie

7.1.1 Allgemeine 2D-Quadrikgleichung

7.1.2 Fazit zu den Quadriken

7.2 Gemeinsame Konstruktionen

7.2.1 Faden-Konstruktionen

7.2.2 Leitgeraden-Konstruktion aller Kegelschnitte

7.2.3 Leitkreis-Konstruktion

7.3 Beweise mit Dandelin'schen Kugeln

7.3.1 Dandelin'sche Kugeln für die Ellipse

7.3.2 Dandelin'sche Kugel für die Parabel

7.3.3 Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel

7.3.4 Ellipsensalami

7.4 Namensgeheimnis der Kegelschnitte

7.5 Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten

7.5.1 Tangenten, Leitkreis und Leitgerade

7.5.2 Tangenten- und Normalengleichungen bei Kegelschnitten

7.5.3 Reflexion an den Kegelschnitten

7.6 Anwendungen der Kegelschnitte

7.6.1 Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Formen in unserer Welt

7.6.2 Anwendungen, die die Reflexionseigenschaften nutzen

7.6.3 Projektion der Kegelschnitte

7.7 Extras und Aufgaben

7.7.1 Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

8 Kurven mit Drehwurm

Übersicht

8.1 Spiralen

8.1.1 Archimedische Spirale

8.1.2 Die Königin der Spiralen

8.1.3 Spiralen, systematisch betrachtet und frei erfunden

8.2 Rosetten

8.2.1 Grundlage für die Rosetten

8.2.2 Rosette als Fußpunktkurve der Astroide

8.2.3 Rosetten mit variabler Blattgröße

8.3 Rollkurven

8.3.1 Zykloiden

8.3.2 Trochoiden

8.3.3 Rollende Parabel und die Kettenlinie

8.4 Schwingungen

8.4.1 Sinus- und Kosinusschwingung

8.4.2 Lissajous-Kurven

9 Besondere Erzeugungsweisen für Kurven

Übersicht

9.1 Fußpunktkurven

9.1.1 Fußpunktkurve einer Parabel

9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

9.1.3 Negative Fußpunktkurven

9.2 Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen

9.2.1 Hüllkurven allgemein

9.2.2 Naum-Gabo-Kurven und grundlegendes Vorgehen

9.2.3 Parabel als Hüllkurve mit der Extremum-Methode

9.2.4 Astroide und die rutschende Leiter

9.3 Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen

9.3.1 Evolute einer Parabel

9.3.2 Kurvenpaare vom Typ: Involute und Evolute

9.3.3 Evolventen und Parallelkurven

9.4 Reflexion und Kaustiken

9.4.1 Kardioide, die Herzkurve

9.4.2 Nephroide, die Nierenkurve

9.4.3 Reflexionen an beliebigen Kurven

9.5 Inversion am Kreis

9.5.1 Erste Erfahrungen mit der Kreisspiegelung

9.5.2 Inversion von Kurven

9.5.3 Kartesische Abbildungsgleichungen

9.5.4 Anallagmatische Kurven

9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

9.6 Exoten-Kurven

9.6.1 Kurven mit natürlicher Gleichung

9.6.2 Klothoide

9.6.3 Traktrix oder Schleppkurve

9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus

10 Didaktische Übersicht

Übersicht

10.1 Grundlegendes zur Didaktik der Kurven

10.1.1 Das Thema Kurven heute

10.1.2 Blick zurück und nach vorn

10.1.3 Didaktische Gründe für den Softwareeinsatz

10.1.4 Wie kann man das freie Erkunden anregen?

10.1.5 Was heißt eigentlich „Verstehen“?

10.2 Was passt zu welchem Vorwissen?

10.2.1 Der Start, geeignet für die Jüngsten

10.2.2 Der zweite Schritt, geeignet für die Jugendlichen

10.2.3 Letzter Schritt in die Freiheit

10.2.4 Blackbox-Whitebox-Prinzip

10.2.5 Begabtenförderung

10.3 Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w

11 Anhang: Elemente der Analysis für Kurven

Übersicht

11.1 Kurven im Blick der Analysis

11.2 Steigung und Ableitung

11.2.1 Steigung und Ableitung, explizit kartesisch

11.2.2 Implizite kartesische Ableitung

11.2.3 Steigung und Ableitung in Parameterdarstellung

11.2.4 Steigung bei Polarkurven

11.2.5 Gleichungen von Tangente und Normale

11.3 Flächen und Volumina der Rotationskörper

11.3.1 Fläche bei Funktionen und expliziten Gleichungen

11.3.2 Kurven in Parameterdarstellung

11.3.3 Flächen bei Polarkurven

11.3.4 Volumen von Rotationskörpern

11.4 Bogenlänge

11.4.1 Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven

11.4.2 Bogenlänge bei Polarkurven

11.5 Krümmungen

11.5.1 Definition der Krümmung und interaktive Zugänge

11.5.2 Herleitung der kartesischen Krümmungsformel aus der Definition

11.5.3 Krümmungsformel für Polarkurven

11.5.4 Orientierung von Kurven

11.5.5 Wirkung des Vorzeichens der Krümmung

Literaturverzeichnis

[2dcurves Website] http://www.2dcurves.com/cubic/cubicr.html#witch%20of%20agnesi, allgemeine Site zu Kurven http://www.2dcurves.com

[Ableitinger und Herrmann 2011] Ableitinger, Christoph; Herrmann, Angela (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden.

[Ableitinger et al. 2013] Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg; Prediger, Susanne (2013): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen. Wiesbaden: Springer Sektrum (Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik).

[Agnesi 1748] Kalifornia State University: Agnesi: http://instructional1.calstatela.edu/sgray/agnesi/ Leider funktioniert dieser Link nur, wenn Sie ihn „von Hand“ kopieren.

[Archimedes 240 v. Chr.] Archimedes; Czwalina-Allenstein, Arthur (2003): Über Spiralen (u.a., Abhandlungen). Unter Mitarbeit von Ostwalds Klassiker. 2. Aufl., reprint der Ausg. Leipzig, Akad. Verl.-Ges., 1922, 1923.

[Arens et al. 2014] Arens, Tilo; Hettich, Frank; Karpfinger, Christian; Kockelkorn; Lichtenegger, Klaus; Stachel, Hellmuth (2014): Mathematik. für Anwender der Mathematik. 3. Aufl. Heidelberg: Springer Spektrum. Zitiert aus 1. Aufl. von 2009.

[Balsam 1861] Apollonius von Perga : Kegelschnitte. Deutsch bearbeitet von H. Balsam. Sieben Bücher nebst dem achten von Halley wieder hergestellt. Berlin (1861): Verlag Georg Reimer. Volltext online verfügbar: http://www.wilbourhall.org/pdfs/apollonius/siebenbcherb00apol.pdf. Bitte blättern, nur die **erste** Seite ist schwarz.

[Bemelmans 2011] Bemelmans, J. (2011), Anhang 2 Archimedes (Einleitung) http://www.instmath.rwth-aachen.de/Preprints/bemelmans20110116.pdf.

[Bewersdorff 2013] Bewersdorff, Jörg (2013): Algebra für Einsteiger. Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie. 5. Aufl. Wiesbaden: Springer Sektrum. Zitiert nach der 1. Aufl. von 2002.

[Brieskorn und Knörrer 1981] Brieskorn, Egbert; Knörrer, Horst (1981): Ebene algebraische Kurven. Basel, Boston: Birkhäuser.

[Brockhaus 1988] Brockhaus-Enzyklopädie, 24 Bde, Bd. 6, 19. Aufl. 1988.

[Bronstein 1999] Bronstein, Ilja N. et al. (1999): Taschenbuch der Mathematik. 4. Aufl. Frankfurt am Main [u.a.]: Deutsch.

[Burau I 1962] Burau, Werner (1962): Algebraische Kurven und Flächen I. Algebraische Kurven der Ebene. 2 Bände. Berlin: de Gruyter, Göschen (435).

[Burau II 1962] Burau, Werner (1962): Algebraische Kurven und Flächen II. Algebraische Flächen 3. Grades und Raumkurven 3. und 4. Grades. 2 Bände. Berlin: de Gruyter, Göschen (436/436a).

[Burau und Hauser 1958] Hauser, Wilhelm; Burau, Werner (1958): Intergrale algebraischer Kurven und ebene algebraische Kurven. Berlin: VEB Dt.V.Wiss.

[Courant und Robbins 1941] Courant, Richard; Robbins, Herbert; Kirsch, Arnold (1992): Was ist Mathematik? 4., unveränd. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest: Springer.

[DMV Website 2000] DMV, Dt. Mathematiker Vereinigung, Behrends, Ehrhard: http://www.mathematik.de/mde/information/wasistmathematik/wasistmathematik.html

[Draeger 1937] Draeger, Max (1937): Ausgewählte höhere Kurven. Leipzig: Quelle / Meyer (Mathematische Arbeitshefte).

[Famous Curves Index] Famous Curves Index: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html

[Fischer 1994] Fischer, Gerd (1994): Ebene algebraische Kurven. Braunschweig: Vieweg (Vieweg Studium Aufbaukurs Mathematik, 67).

[Fladt 1962] Fladt, Kuno (1962): Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft.

[Franzke 2012] Franzke, Peter (2012): Zum Delischen Problem. Berlin, http://www.ebelt-beratung.de/ZumDelischenProblem.pdf und http://www.ebelt-beratung.de/html/veroffentlichungen.html

[Gaechter 1997] Grächter, Albert: Eine Handvoll fundamentaler Ideen. Infinitesimalgeometrie. In: MU Der Mathematikunterricht, Jahrgang 43 Bd. 3, S. 5–48. Verlber: Friedrich Verlag.

[Gandtner 1912] Gandtner, I. O. (1912): Analytische Geometrie. für den Schulunterricht bearbeitet (1887). 15. Aufl. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung.

[Glaeser 2014] Glaeser, Georg (2014): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. 3. Aufl. Heidelberg: Springer Spektrum, http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?an=1159.00019.

[Glaeser 2014] Glaeser, Georg (2014): Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik. 4. Aufl. Heidelberg: Springer Spektrum. Zitiert nach der 2. Aufl. von 2006.

[Glaeser und Polthier 2010] Glaeser, Georg; Polthier, Konrad (2010): Bilder der Mathematik. 2. Aufl. Heidelberg: Springer Spektrum.

[Haftendorn 2016] Haftendorn, Dörte (2016): Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt. 2., erw. Aufl., 1. Aufl. 2010, Berlin [u.a]: Springer Spektrum. Website zum Buch Haftendorn 2016 http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

[Haftendorn Website zu diesem Buch] Haftendorn http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de Die Gliederung entspricht dem Buch.

[Haftendorn 1] Website http://www.mathematik-verstehen.de Suchen Sie mit Hilfe des Menüs links.

[Haftendorn 2] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/analysis/polar/polar-kartes/polar-kartes.htm

[Haftendorn 3] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/kurven/kurven.htm

[Haftendorn 4] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/computer/texas/texas.htm

[Haftendorn 5] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/analysis/affenkasten/affenkasten.htm.

[Haftendorn 6] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/kurven/terme/terme.htm

[Haftendorn 7] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/kurven/lehre/lehre.htm

[Haftendorn 8] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/geschichte/griechen/winkeldreiteil-falten.htm

[Haftendorn 9] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/geo/geo-plus/quasi-konstrukt/quasi-konstrukt.htm

[Haftendorn 10] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/kurven/kegel/leitkreis/leitkreis.htm

[Haftendorn 11] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/kurven/kegel/namensgeheimnis/namensgeheimnis.htm, unten auf der Seite.

[Haftendorn 12] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/geschichte/griechen/griechen.htm.

[Haftendorn 13] Website http://www.mathematik-verstehen.de/mathe-lehramt/numerik/numerik.htm.

[Heitzer 1998] Heitzer, Johanna (1998): Spiralen. Ein Kapitel phänomenaler Mathematik. 1. Aufl., 1. [Dr.]. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett-Schulbuchverl. (Lesehefte Mathematik).

[Henn 2012] Henn, Hans-Wolfgang (2012): Geometrie und Algebra im Wechselspiel. Mathematische Theorie für schulische Fragestellungen. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage Wiesbaden: Vieweg+Teubner (Studium).

[Henn und Filler 2015] Henn, Hans-Wolfgang; Filler, Andreas (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen - Geometrisch veranschaulichen und anwenden. Berlin [u.a.]: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

[Henn und Filler Website] Beweis zu den Quadriken http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/didagla/dateien/Quadratische_Formen.pdf, allgemeine Website zum eben genannten Buch http://www.afiller.de/didagla.

[Hischer 2015] Hischer, Horst (2015): Die drei klassischen Probleme der Antike. Historische Befunde und didaktische Aspekte. Hildesheim: Franzbecker.

[Irrgang 1994] Irrgang, Rolf-Eberhard (1994): Kegelschnitte. Unter Mitarbeit von Scheid. 1. Aufl., 4. [Dr.]. Stuttgart: Klett (Themenhefte Mathematik).

[Kaenders 2014] Kaenders, Rainer (2014): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn. 2. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

[Johanneum 2000] Johanneum Lüneburg zur Expo 2000. http://www.johanneum-lueneburg.de/expo/jonatur/wissen/mathe/kurven/kurven.htm

[Koecher 2005a] Köcher, Markus http://www.mathematik.de/ger/information/wasistmathematik/bruecke.html

[Koecher 2005b] Köcher, Markus http://www.mathematik.de/ger/information/wasistmathematik/tragseil.pdf

[Labs 2008] Labs, Oliver: Raumflächen-Software Surfer. http://www.imaginary2008.de/surfer.php?lang=en

[Labs 2015] Labs, Oliver: Website, 3D-Druck. http://www.oliverlabs.net

[Lambert 2016] Lambert, Anselm (2016): Experimentelle Geometrie: ein neuer Blick in alte Bücher. In: mathematik lehren (196), S. 44–46.

[Lietzmann 1933] Lietzmann, W. (1933): Kegelschnittlehre. Leipzig, Berlin: Teubner Verlag.

[Lockwood 1961] Lockwood, E. H. (1961): A Book of Curves. 1. Aufl. 1 Band. London: University Press.

[MacTutor 1999] St. Andrews history: Agnesi. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Agnesi.html

[Math-World] Weisstein, Eric von Mathematica and the world's mathematical community http://mathworld.wolfram.com/topics/Curves.html, allgemein www.math-world.com.

[Mehlhorn und Curbach 2014] Mehlhorn, Gerhard; Curbach, Manfred (2014): Handbuch Brücken. Entwerfen, Konstruieren, Berechnen, Bauen und Erhalten. 3. Aufl. Wiesbaden, Springer Vieweg. Zitiert nach der 2., erw. und bearbeiteten Aufl. von 2010.

[Mathematikum] Mathematikum, Gießen, http://www.mathematikum.de

[Mathe Vital] Richter-Gebert, Jürgen Mathe Vital, TUM (TU München)

[Nix 1889] Nix, Ludwig (1889): Das fünfte Buch der conica des Apollonius von Perga, arab. Übersetzung Thabit, dt. mit Einleitung von Ludwig Nix, Leipzig: Drugulin, Volltext online verfügbar http://menadoc.bibliothek.uni-halle.de/ssg/content/titleinfo/931631

[Parchomenko 1957] Parchomenko (1957): Was ist eine Kurve? Berlin: VEB Dt.V.Wiss.

[Penßel und Penßel 1994] Penßel, Christine; Penßel, Hans-Jürgen (1994): Kegelschnitte. 1. Aufl., 1., unveränderter Nachdruck München: Bayerischer Schulbuch-Verlag (bsv Mathematik).

[Peters 2009] Peters, Thomas: Kettenlinie. http://www.mathe-seiten.de/kettenlinie.pdf

[Pólya 1949] Pólya, George (1995): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Sonderausgabe 4.Auflage. 4. Aufl. Tübingen, Basel: Francke (Sammlung Dalp).

[Pólya 1969] Pólya, George (1969): Mathematik und plausibles Schließen. Bd. 1 Induktion und Analogie in der Mathematik. 2. Aufl. 2 Bände. Basel: Birkhäuser.

[Pólya1975] Pólya, George (1995): Mathematik und plausiblen Schließen. Bd. 2 Typen und Strukturen plausibler Folgerung. 2 Bände. Basel: Birkhäuser.

[Rademacher und Toeplitz 1933] Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): Von Zahlen und Figuren. Berlin: Springer.

[van Randenborgh 2013] van Randenborgh, Christian: http://cermat.org/blog/christian-van-randenborgh-das-erforschen-von-historischen-zeichenger%C3%A4ten-im

[van Randenborgh 2012] van Randenborgh, Christian: Frans van Schootens Beitrag zu Descartes Discours de la méthode", journal="Mathematische Semesterberichte, Vol 59 Issue 2 pp 223-241.

[Riemer und Schmidt 2015] Riemer, Wolfgang; Schmidt, Reinhard (2015): Klothoiden „erfahren“. - mit GPS, Google und GeoGebra. In: MU (4).Riemer, Wolfgang; Schmidt, Reinhard (2015): Klothoiden „erfahren“. - mit GPS, Google und GeoGebra. In: MU (4). Online verfügbar: http://www.riemer-koeln.de/mathematik/publikationen/gps/mu-klothoide/klothoiden-erfahren.pdf

[Schlottke et al. 2002] Schlottke et al. (2002): Stationenlernen rund um den Kreis. Köln: Aulis Verlag.

[Schmidt 1949] Schmidt, Hermann (1949): Ausgewählte höhere Kurven. für Schüler der oberen Klassen und Studenten der ersten Semester. Wiesbaden: Kesselringsche Verlagsbuchhandlung.

[Schröer und Irle 1998] Schröer, Klaus; Irle, Klaus (1998): Ich aber quadriere den Kreis. Leonardo da Vincis Proportionsstudie. Münster, New York: Waxmann.

[van Schooten 1659] Frans van Schooten (1659): mathematische Offeningen. Gerrit von Godesberg, Amsterdam, S. 299ff, online verfügbar (niederländisch): http://www.fransvanschooten.nl/fvs_boek.htm

[Schumann 2007] Schumann, Heinz (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

[Schumann 2011] Schumann, Heinz (2011): Elementare Tetraedergeometrie. Eine Einführung in die Raumgeometrie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

[Schupp 1988] Schupp, Hans (1988): Kegelschnitte. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag

[Schupp und Dabrock 1995] Schupp, H., Dabrock, H.: Höhere Kurven: Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

[Schupp 2000] Schupp, Hans.: Kegelschnitte. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

[Steinberg 1998] Steinberg, Günter (1998): Ausgewählte Aufgaben zur Analysis. Dr. A,1. Hannover: Schroedel.

[Steinberg 1993] Steinberg, Günter (1993): Polarkoordinaten. Eine Anregung, sehen und fragen zu lernen. Hannover: Metzler-Schulbuchverl.

[Weigand und Weth 2002] Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas (2002): Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[Weth 1993] Weth, Thomas (1993): Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

[Wikipedia] `https://de.wikipedia.org`, wenn nichts Anderes gesagt ist, geben Sie das jeweils naheliegende Wort bei der Suche ein.

[Wieleitner 1919] Wieleitner, H.: Algebraische Kurven I. Gestaltliche Verhältnisse. 1919. Aufl. Leipzig, Berlin:: Göschen, de Gruyter.

[Xah Lee Website] Xah Lee 2016, Webite zu Kurven mit Animationen, GeoGebra-Dateien und Mathematica-Dateien `http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html`.

Index