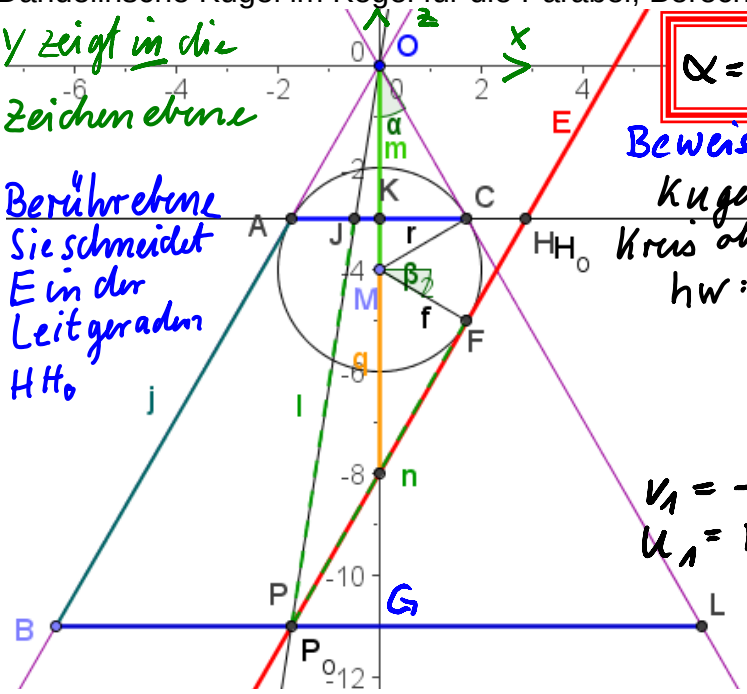
Dandelinsche Kugel im Kegel für die Parabel, Berechnungen für die Zeichnung



$\alpha = \beta \Rightarrow$ Kegelschnitt ist Parabel

Beweis

Kugel oben $M = (0,0,-m)$

Kreis oben $\overline{OC} = m\cos\alpha$

$hw := \overline{OK} = \overline{OC}\cdot\cos\alpha = m\cos^2\alpha$

$KC = \overline{OC}\cdot\sin\alpha = m\sin\alpha\cos\alpha$

$r = m\sin\alpha$

Brennpunkt $F_1 = (u_1, v_1)$

$v_1 = -m - r\sin\beta = -m - m\sin\alpha\sin\beta$

$u_1 = r\cos\beta = m\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha = \beta \Rightarrow u_1 = m\sin\alpha\cos\alpha$

$v_1 = -m(1+\sin^2\alpha)$

Ebene Normalenvektor durch $\begin{pmatrix}0\\-m\\-q\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-u_1\\0\\-v_1-m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\sin\alpha\cos\beta\\0\\m\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-\cos\beta\\0\\\sin\beta\end{pmatrix} =: \vec{n}$$

$-\cos\beta\, x + \sin\beta\, z = -m(\sin\alpha + \sin\beta) = -2m\cdot\sin\alpha$

Ein Punkt P auf Stange, Tiefe $-h$

$x = r(h)\cos t \quad y = r(h)\sin t \quad z = -h$

$x = h\tan\alpha\cos t \quad y = h\tan\alpha\sin t \quad z = -h$

liegt auf Ebene: $\alpha = \beta$, $-\cos\alpha\, h\tan\alpha\cos t - \sin\alpha\cdot h = -2m\sin\alpha \;|:\sin\alpha$

$-h(\cos t + 1) = -2m$

$h = h(t) = \frac{2m}{\cos t + 1}$

Parameterdarst. der Parabel

$$x_P = \frac{2m\tan\alpha\cos t}{\cos t + 1} \qquad y_P = \frac{2m\tan\alpha\sin t}{\cos t + 1} \qquad z_P = -\frac{2m}{\cos t + 1}$$

Stange $\overline{PJ}$ oberer Pkt $x = m\sin\alpha\cos\alpha\cos t$, $y = m\sin\alpha\cos\alpha\sin t$, $z = -m\cos^2\alpha$

Länge $\overline{PF_1} = \overline{PJ}$ beides sind Tangenten abschnitte von P aus.

A, B in x-z Ebene

$$A = \begin{pmatrix}-KC\\0\\-hw\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\sin\alpha\cos\alpha\\0\\-m\cos^2\alpha\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-h(t)\tan\alpha\\0\\-h(t)\end{pmatrix}$$

$\overline{PJ} = \overline{AB}$ zwischen Kreisen

$$H_0 = \begin{pmatrix}+KC\\0\\-hw\end{pmatrix} \qquad P_0 = \begin{pmatrix}x_P\\0\\-h(t)\end{pmatrix}$$

$\overline{AB} = \overline{H_0P_0}$ in Parallelogramm der x-z-Ebene

$$H = \begin{pmatrix}+KC\\y_P\\-hw\end{pmatrix}$$

$\overline{H_0P_0} = \overline{HP}$ Rechteck auf der Ebene E

$\Rightarrow \boxed{\overline{PF_1} = \overline{PH}}$ P ist vom Brennpunkt genau so weit entfernt wie von der Leitgeraden.