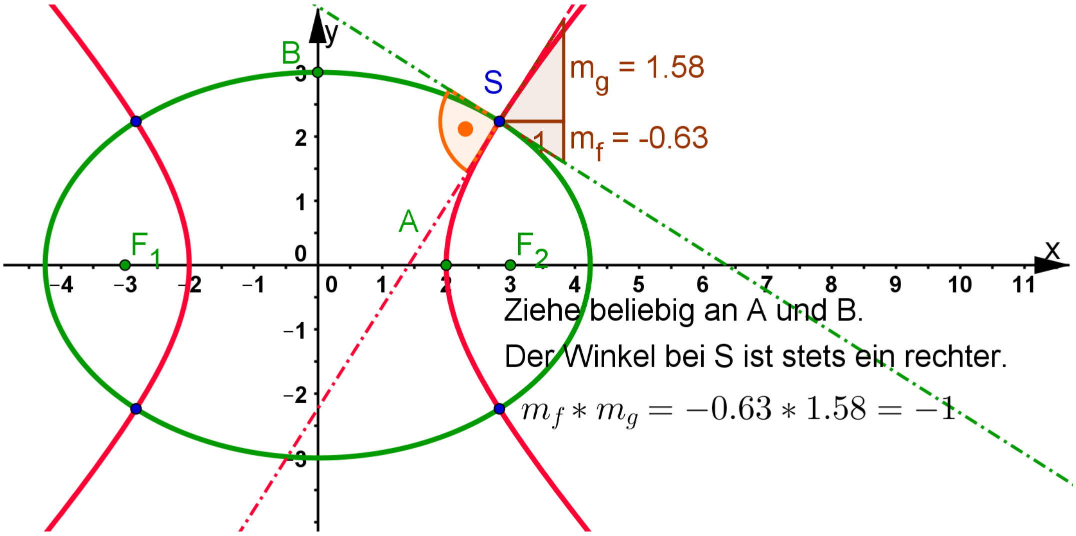
Kurven sehen und verstehen

Haftendorn Feb. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

---

Aufgabe 7.3 Konfokale Kegelschnitte



In[1]:= `elli = x^2 / (b^2 + e^2) + y^2 / b^2 == 1`

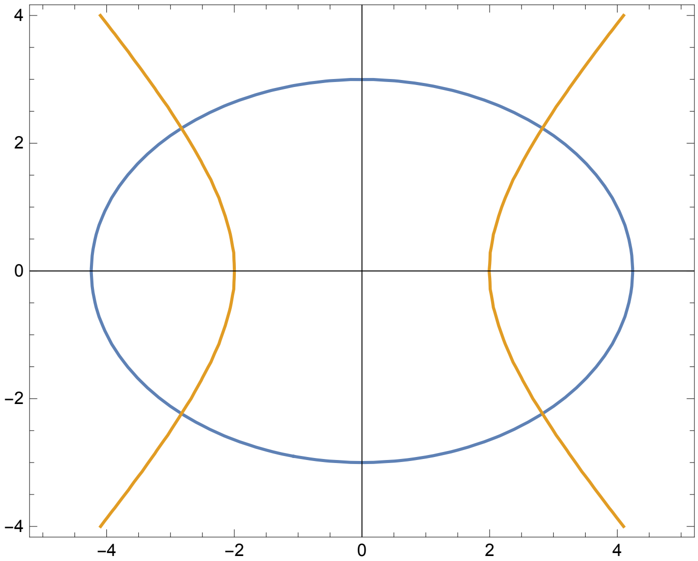
Out[1]= $\frac{x^2}{b^2+e^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1$

In[6]:= `hyp = x^2 / a^2 - y^2 / (e^2 - a^2) == 1`

Out[6]= $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{-a^2+e^2} == 1$

In[37]:=
```
ContourPlot[{elli, hyp} /. {a → 2, b → 3, e → 3} // Evaluate,
  {x, -5, 5}, {y, -4, 4}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
```
Konturgraphik, werte aus, Seitenverhältnis, automatisch, Axen, wahr

Out[37]=



Bestimmung des Schnittpunktes

In[11]:= $\texttt{lo = Solve}\left[\frac{z}{a^2} - \frac{y^2}{-a^2+e^2} == \frac{z}{b^2+e^2} + \frac{y^2}{b^2}, z\right]$
löse

$\left\{\left\{z \to -\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)y^2}{b^2\left(a^2-e^2\right)}\right\}\right\}$ (* Abszissenquadrat vom Schnitt*)

In[12]:= lo[[1]]

Out[12]= $\left\{z \to -\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)y^2}{b^2\left(a^2-e^2\right)}\right\}$

In[14]:= $\frac{z}{b^2+e^2} + \frac{y^2}{b^2}$ /. lo[[1]]

Out[14]= $\frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2 y^2}{b^2\left(a^2-e^2\right)}$

In[17]:= $\texttt{loo = Solve}\left[\frac{zz}{b^2} - \frac{a^2\,zz}{b^2\left(a^2-e^2\right)} == 1, zz\right]$
löse

$\left\{\left\{zz \to -\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}\right\}\right\}$ (* Ordinatenquadrat vom Schnitt*)

In[23]:= $\texttt{zy} = -\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}$

Out[23]= $-\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}$

In[34]:= $zx = -\frac{a^2\left(b^2+e^2\right) zy}{b^2\left(a^2-e^2\right)}$

Out[34]= $\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}$

$\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}$ (* Abszissenquadrat vom Schnitt*)

In[36]:= $\frac{zx}{b^2+e^2}+\frac{zy}{b^2}==1$ // Simplify
vereinfache

Out[36]= True

$\frac{a^2}{e^2}-\frac{a^2-e^2}{e^2}==1$ (*wahre Aussage, ok also*)

Implizite Ableitung Elli

In[24]:= $\frac{2\,x}{b^2+e^2}+\frac{2\,y\,ys}{b^2}==0$ /. {x → Sqrt[zx] , y → Sqrt[zy]}
Quadratwurzel Quadratwurze

Out[24]= $\frac{2\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}}}{b^2+e^2}+\frac{2\sqrt{-\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}}\;ys}{b^2}==0$

In[26]:= Solve$\left[\frac{2\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}}}{b^2+e^2}+\frac{2\sqrt{-\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}}\;ys}{b^2}==0, \{ys\}\right]$
löse

In[27]:= $\left\{\left\{ys\to-\frac{b^2\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}}}{\sqrt{\frac{b^2\left(-a^2+e^2\right)}{e^2}}\left(b^2+e^2\right)}\right\}\right\}$ // FullSimplify
vereinfache vollständig

Out[27]= $\left\{\left\{ys\to-\frac{a^2\,b^2}{\sqrt{b^2\left(1-\frac{a^2}{e^2}\right)}\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{e^2}\right)}\;e^2}\right\}\right\}$

Implizite Ableitung hyp

In[29]:= $\frac{2\,x}{a^2}-\frac{2\,y\,yh}{-a^2+e^2}==0$ /. {x → Sqrt[zx] , y → Sqrt[zy]}
Quadratwurzel Quadratwurze

Out[29]= $\frac{2\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+e^2\right)}{e^2}}}{a^2}-\frac{2\sqrt{-\frac{b^2\left(a^2-e^2\right)}{e^2}}\;yh}{-a^2+e^2}==0$

In[32]:=
```
Solve[2 Sqrt[a^2 (b^2+e^2)/e^2]/a^2 - 2 Sqrt[-b^2 (a^2-e^2)/e^2] yh/(-a^2+e^2) == 0, yh] // FullSimplify
```
löse — vereinfache vollständig

$$\text{Solve}\left[\frac{2\sqrt{\frac{a^2(b^2+e^2)}{e^2}}}{a^2} - \frac{2\sqrt{-\frac{b^2(a^2-e^2)}{e^2}}\,yh}{-a^2+e^2} == 0,\ yh\right] \text{ // FullSimplify}$$

Out[32]= $\left\{\left\{yh \to \frac{\sqrt{b^2\left(1-\frac{a^2}{e^2}\right)}\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{e^2}\right)}\ e^2}{a^2\ b^2}\right\}\right\}$

ys*yh

In[33]:= $-\frac{a^2\ b^2}{\sqrt{b^2\left(1-\frac{a^2}{e^2}\right)}\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{e^2}\right)}\ e^2} * \frac{\sqrt{b^2\left(1-\frac{a^2}{e^2}\right)}\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{e^2}\right)}\ e^2}{a^2\ b^2}$ // Simplify

vereinfache

Out[33]= -1

Damit ist bewiesen, dass sich konfokale Ellipsen und Hyperbeln stets senkrecht schneiden.