Kurven sehen und verstehen

Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Aufgabe 7.7 Orthoptische Kurven

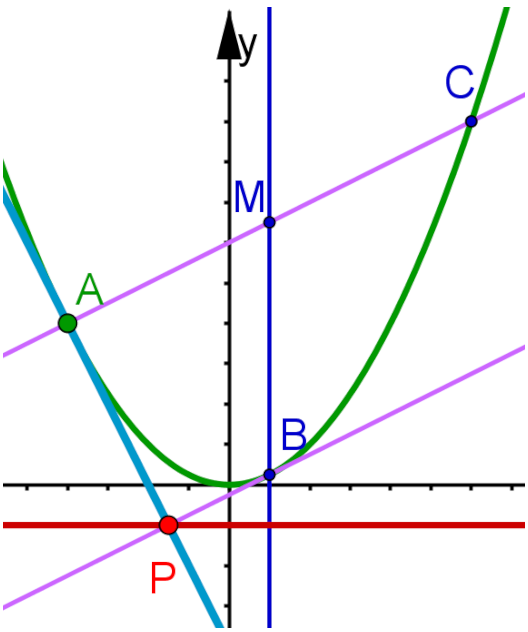
Definition: C sei eine Kurve. Von allen Punkten der **orthoptischen Kurve Co von C** sieht man die Kurve C unter einem rechten Winkel.

D.h.: Für jeden Punkt P von Co hat C zwei Tangenten, die sich in P senkrecht schneiden.
Als Konstruktionsaufgabe: Konstruiere zu einem Punkt A von C einen weiteren Punkt B auf C, so dass sich die Tangenten von A und B an C senkrecht schneiden.

Bemerkenswert ist, dass stets in gleicher Weise die Eigenschaft der \textbf{konjugierten Durchmesser} ausgenutzt wird. Zu der gegebenen Tangente wird durch die Normale eine Sehne erzeugt, deren Mittelpunkt mit dem Zentrum O verbunden wird. Diesen konjugierten Durchmesser schneidet den Kegelschnitt in dem gesuchten Punkt B.
Die Tangente in B ist parallel zur Sehnenschar und daher orthogonal zur gegebenen Tangente in A. Der Schnittpunkt P der beiden Tangenten ist der gesuchte Punkt der Ortskurve.

Die orthoptische Kurve einer Parabel ist ihre Leitgerade

\paragraph{Parabel} Bei der Parabel gibt es keinen eigentlichen Mittelpunkt. Der zweite Brennpunkt ist im Unendlichen, darum liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer Parallelen zur Parabelachse.



```
a = 1/(2 p)
```

$\frac{1}{2\,p}$

```
F[x_, y_] := y - a^2 x^2
F[u, v]
```

$-\frac{u^2}{4\,p^2} + v$

```
m1 = 2 a u; m2 = 2 a s;
t1 = y == m1 (x - u) + a u^2
t2 = y == m2 (x - s) + a s^2
senk = m2 == -1/m1
```

$y == \frac{u^2}{2\,p} + \frac{u\,(-u + x)}{p}$

$y == \frac{s^2}{2\,p} + \frac{s\,(-s + x)}{p}$

$\frac{s}{p} == -\frac{p}{u}$

```
Assuming[a > 0, {Eliminate[{t1, t2, senk}, {u, s}]}] // Factor // Simplify
```

angenommen eliminiere faktorisiere vereinfache

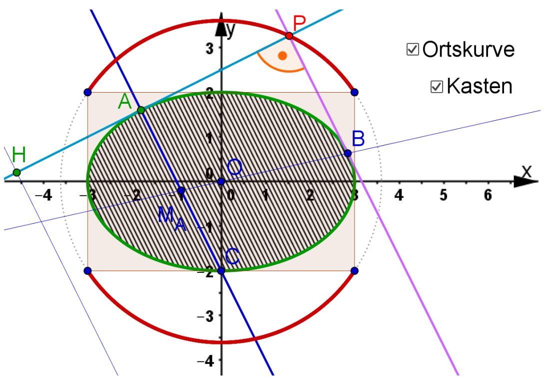
$\{(p + 2\,y)\,(p^2 - 4\,p\,y + 4\,(x^2 + y^2)) == 0\,\&\&\,p \neq 0\}$

Das sind die Leitgerade und noch der Brennunkt $(0, \frac{p}{2})$

Die orthoptische Kurve einer Ellipse ist ein Kreis durch die Ecken des umfassenden Rechtecks

```
Quit
```

beende Kernel



$\text{Elli} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1$

$$\text{Atang} = \frac{u\,x}{a^2} + \frac{v\,y}{b^2} == 1$$

$$\text{Btang} = \frac{s\,x}{a^2} + \frac{t\,y}{b^2} == 1$$

$$\frac{u\,x}{a^2} + \frac{v\,y}{b^2} == 1$$

$$\frac{s\,x}{a^2} + \frac{t\,y}{b^2} == 1$$

$$\text{mA} = \frac{b^2\,u}{a^2\,v};\ \text{mB} = \frac{b^2\,s}{a^2\,t};$$

$$\text{senk} = \text{mB}\,\text{mA} == -1$$

$$\frac{b^4\,s\,u}{a^4\,t\,v} == -1$$

$$\text{senk} = b^4\,s\,u == a^4\,t\,v$$

$$b^4\,s\,u == a^4\,t\,v$$

$$\text{elliA} = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} == 1$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} == 1$$

$$\text{elliB} = \frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} == 1$$

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} == 1$$

```
Assuming[{a > 0, b > 0}, {Eliminate[{elliA, elliB, Atang, Btang, senk}, {u, s, v, t}]}] //
angenommen                eliminiere
  Factor // Simplify
  faktorisiere  vereinfache
$Aborted
```

Das ist (noch nicht!!!) ein Kreis um O mit dem Radius a^2+b^2

Die orthoptische Kurve einer Ellipse ist ein Kreis durch die Ecken des umfassenden Rechtecks

KONKRET

$$\text{Ellik} = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} == 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} == 1$$

$$\text{Atangk} = \frac{u\,x}{3^2} + \frac{v\,y}{2^2} == 1$$

$$\text{Btangk} = \frac{s\,x}{3^2} + \frac{t\,y}{2^2} == 1$$

$$\frac{u\,x}{9} + \frac{v\,y}{4} == 1$$

$$\frac{s\,x}{9} + \frac{t\,y}{4} == 1$$

$$\text{mAk} = \frac{2^2\,u}{3^2\,v};\ \text{mBk} = \frac{2^2\,s}{3^2\,t};$$

$$\text{senkk} = \text{mBk}\ \text{mAk} == -1$$

$$\frac{16\,s\,u}{81\,t\,v} == -1$$

$$\text{senkk} = 2^4\,s\,u\ == 3^4\,t\,v$$

$$16\,s\,u == 81\,t\,v$$

$$\text{elliAk} = \frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{2^2} == 1$$

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} == 1$$

$$\text{elliBk} = \frac{s^2}{3^2} + \frac{t^2}{2^2} == 1$$

$$\frac{s^2}{9} + \frac{t^2}{4} == 1$$

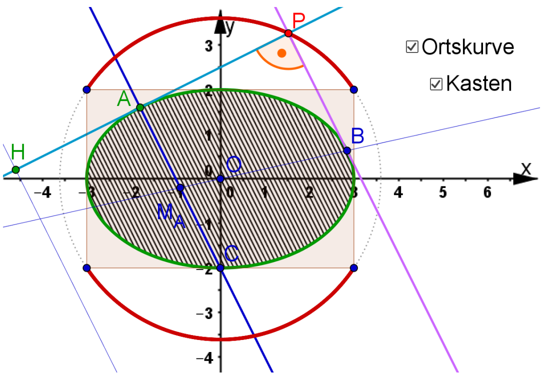
Die Gleichung u+s==v+t hatte ich noch von Hand aus den ersten vier Gleichungen hergeleitet. Eigentlich müssten die fünf benannten Gleichungen ausreichen.

```
Eliminate[{elliAk, elliBk, Atangk, Btangk, senkk, u + s == v + t} // Evaluate, {u, s, v, t}]
eliminiere                                                          werte aus
```

```
$Aborted[]
```

Das ist (noch nicht!!!) ein Kreis um O mit dem Radius a^2+b^2=13

..



Die orthoptische Kurve einer Hyperbel ist ein Kreis mit dem Radius $a^2 - b^2$

```
Quit
```

beende Kernel