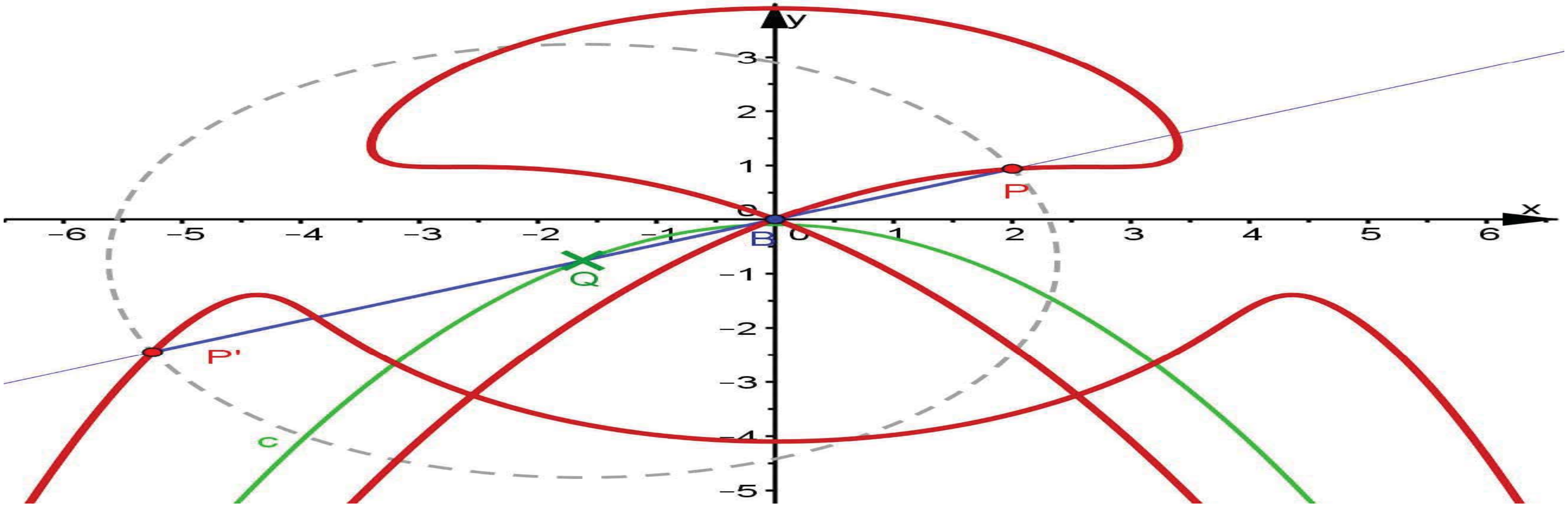
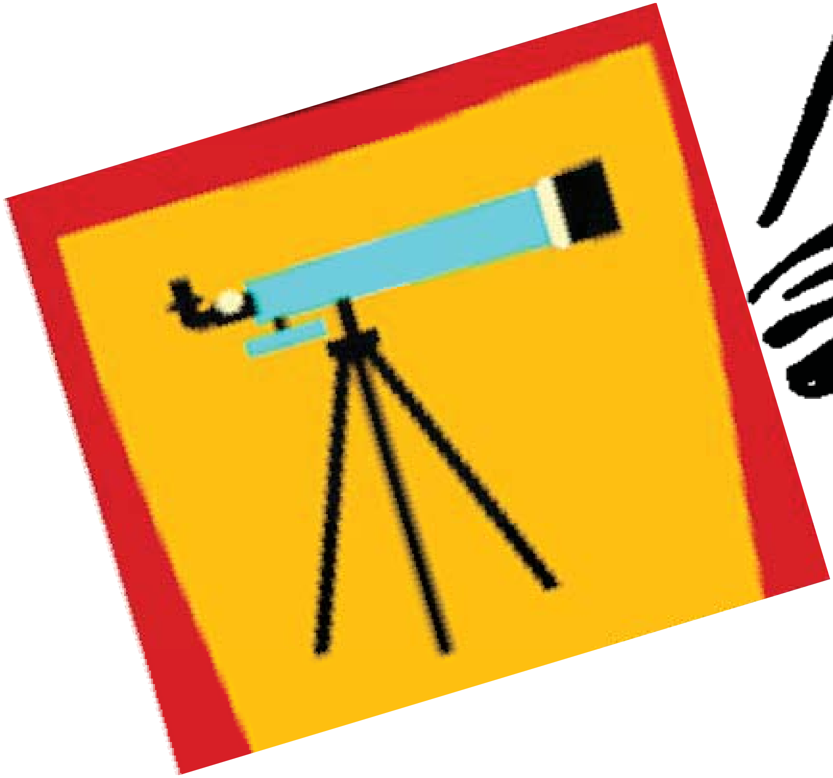
Kurven erkunden und verstehen



Ein vernachlässigtes Feld, es könnte aber ein fruchtbarer Acker sein, auf dem Mathematik und Mathematikbegeisterung gedeihen können

Kurven erkunden und verstehen

- Mein Buch ist in Arbeit!



ab Sommer 2016

www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven erkunden und verstehen

- Vielen Dank, dass ich diesem ruhmreichen Saal einen Vortrag halten darf.
- Otto Toeplitz hätte, so denke ich, mein Vorhaben gebilligt, mich in „generischer Methode“ dem Thema Kurven zu nähern.

2. Aufl. Herbst 2015

Das andere Buch war für „alle“, das neue ist für die Mathematik-Lehre

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Ziele von Vortrag und Buch

- Es ist erst einmal natürlich **für Sie**, die Sie hierher gekommen sind.
- Zielgruppe am Ende: **Lernende** der Mathematik
- Zielgruppe der Mittler: **Lehrer** und **Lehramtsstudierende** der Mathematik
- Zielgruppe der Impulsgeber: Lehrende der Mathematik in **fachwissenschaftlicher Lehramtsausbildung** mit didaktischem Futter
- Handwerklich saubere Arbeit, geometrische und analytische Behandlung, Beweise, logischer Aufbau,…
- Kein Ziel ist: Durch Formalisierung Lernen zu verhindern.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven, alles ist mit allem verwoben

Wie führt man Kurven ein?

Wo sind Freiheiten zum Erkunden?

Was heißt „verstehen“ ?

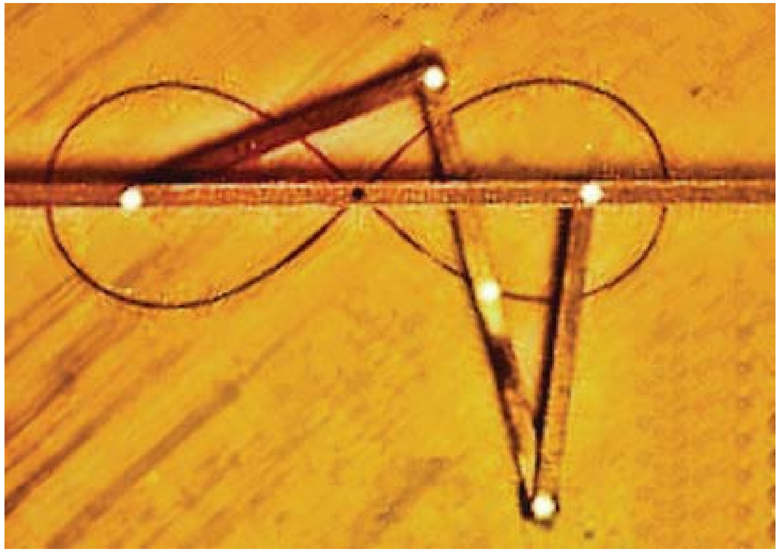
Wie ermöglicht man Eigentätigkeit?

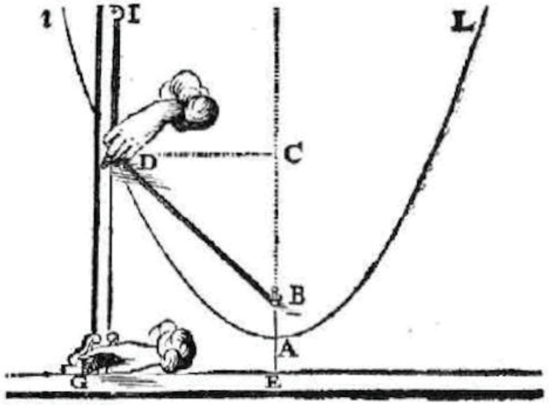
Welche Bezüge gibt es unter den Kurven?

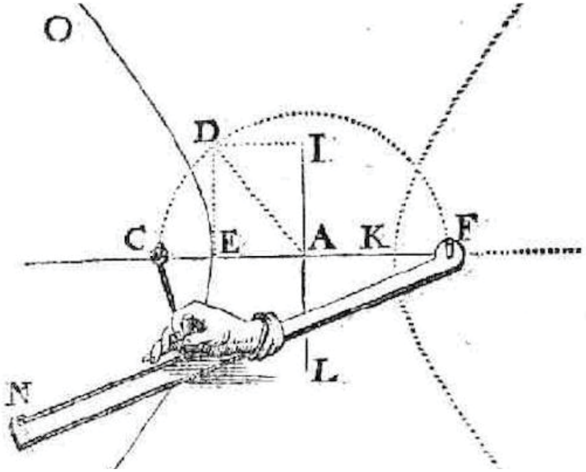
Welche Werkzeuge sind hilfreich?

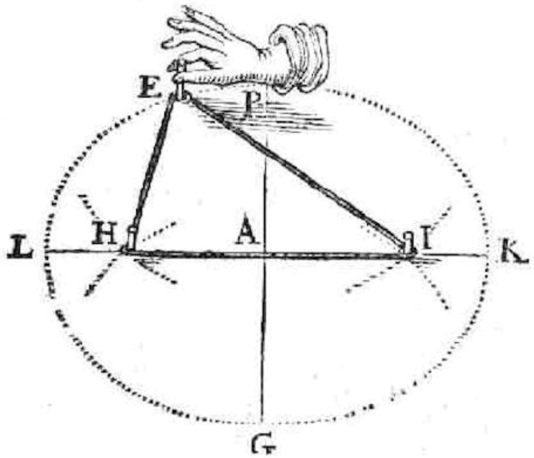
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Starten mit Handeln

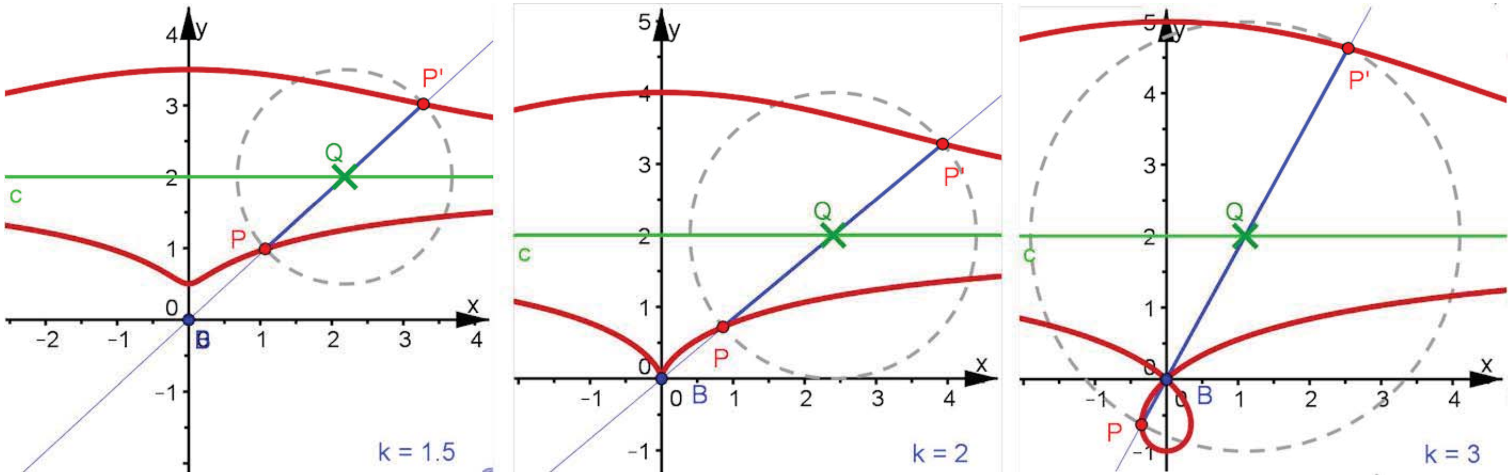




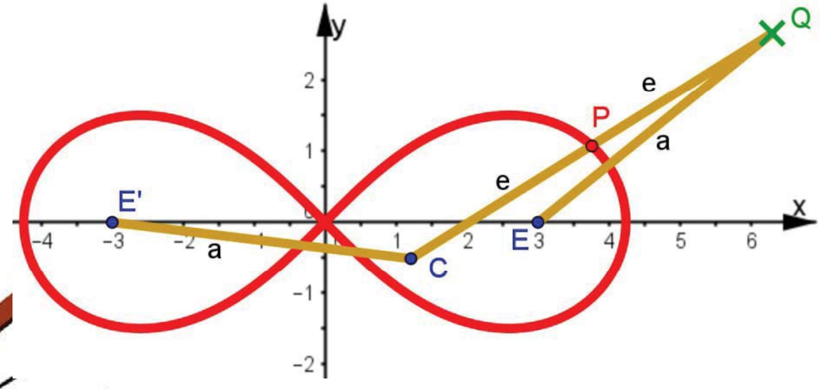




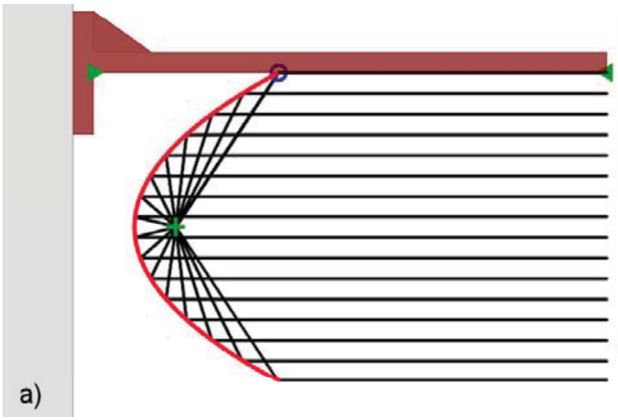
Geometrisch Erfassen und Realisieren



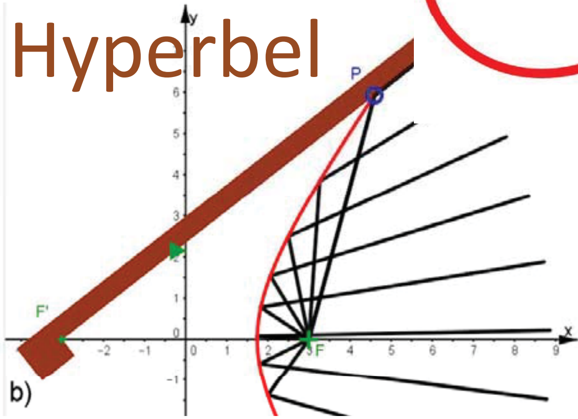
Konchoide des Nikomedes



Lineale mit Faden: Parabel



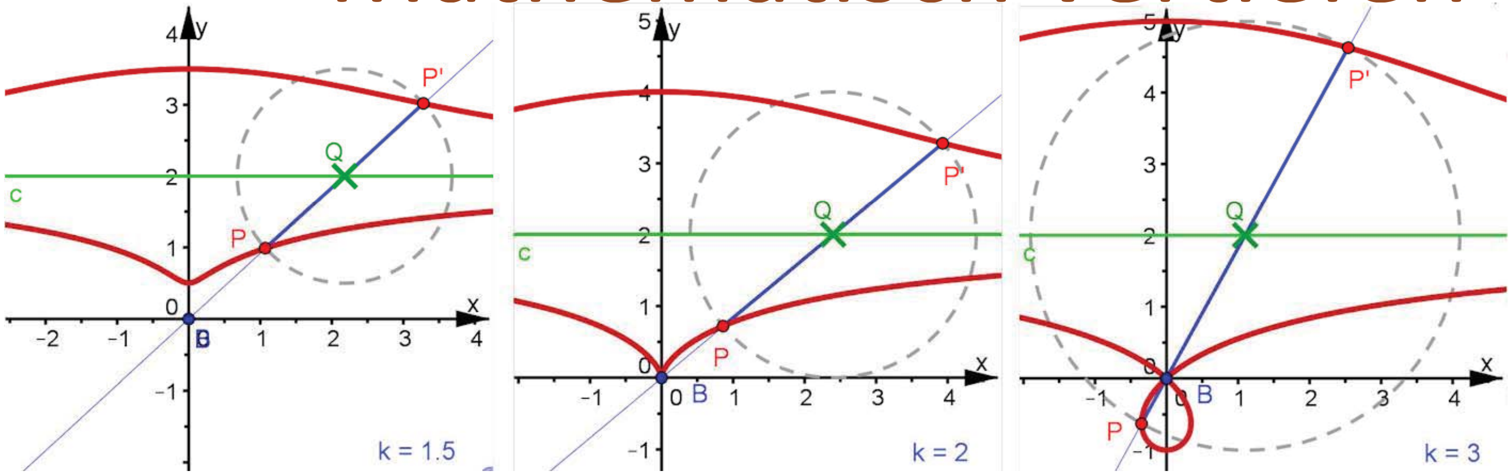
Hyperbel



Bernoulli'sche Lemniskate

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Mathematisch vertiefen



Für die Jüngsten:

Konchoide des Nikomedes

- Alle Erscheinungsformen finden.
- Überlegen und experimentieren, wovon die Form abhängt.
- Überlegen, ob der „Wanderweg von Q“ geschnitten werden kann.
- Ausprobieren und entscheiden, welche der folgenden Gleichungen stimmen kann:

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2=k^2y^2$$

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen

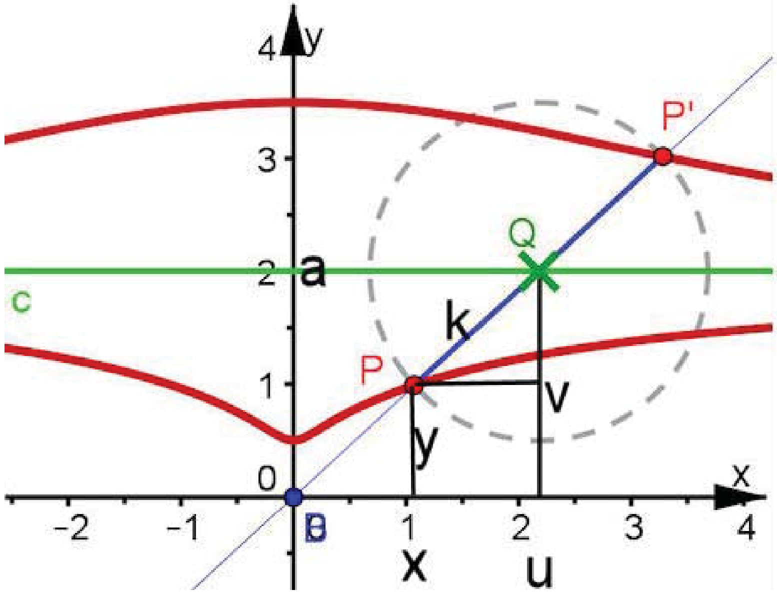
Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung dieser Hundekurven-Gleichung?

a) $(x+y)^2\cdot(y-a)^2=k^2y^2$ b) $(x^2+y^2)\cdot(y^2-a^2)=k^2y^2$

c) $x^2(y-a)^2=y^2(k^2-(y-a)^2)$ d) $(k+y-a)(k-y+a)y^2=(x\cdot(y-a))^2$

e) $x^2y^2=(y+a)^2(k^2-y^2)$

Mit Pythagoras und Strahlensatz



Konchoide des Nikomedes

Einhaltung von Bezeichnungsstandards

$Q = (u, v)$ **X in grün**

$P = (x, y)$ **in rot**

Kreise zum Übertragen von Abständen grau gestrichelt

Gleichung 1: Weg von Q $v = a, \quad u$ frei

Gleichung 2: Ort 1 von P $(u-x)^2 + (v-y)^2 = k^2$

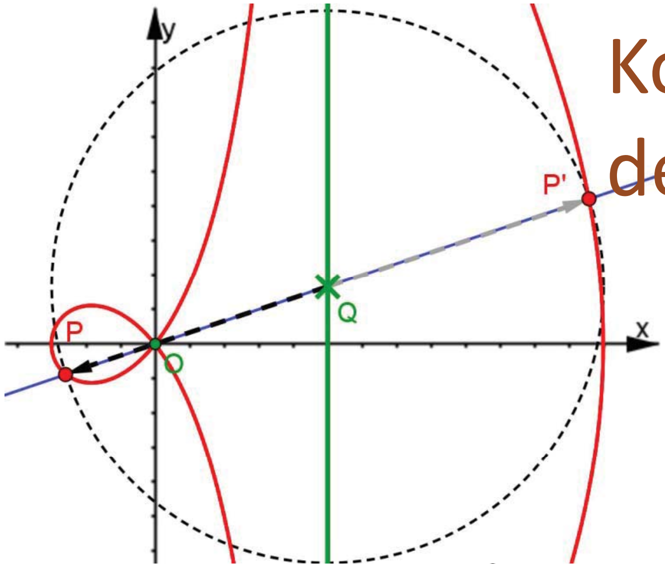
Gleichung 3: Ort 2 von P

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$$

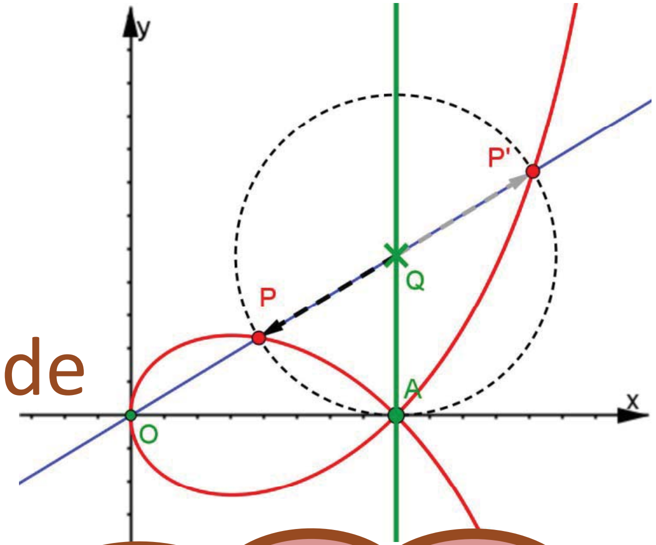
Also: $\left(\frac{ax}{y} - x\right)^2 + (a-y)^2 = k^2$

$$(x^2 + y^2) \cdot (y-a)^2 = k^2 y^2$$

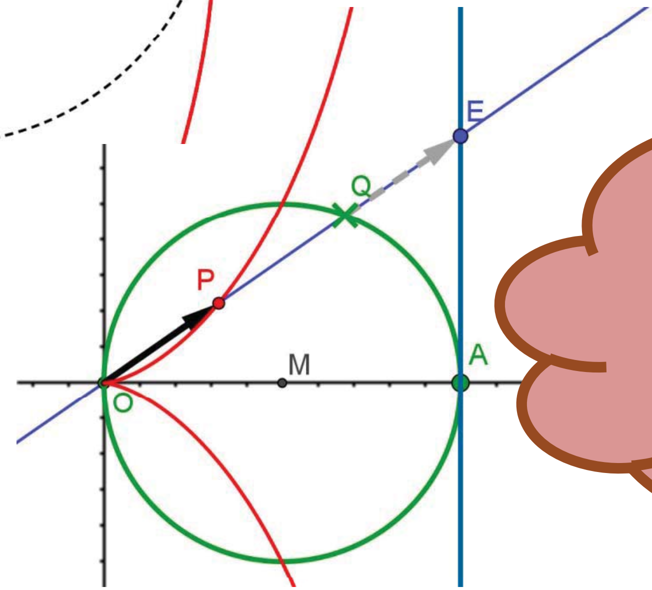
Kurven aus geometrischen Konstruktionen



Konchoide des Nikomedes



Strophoide

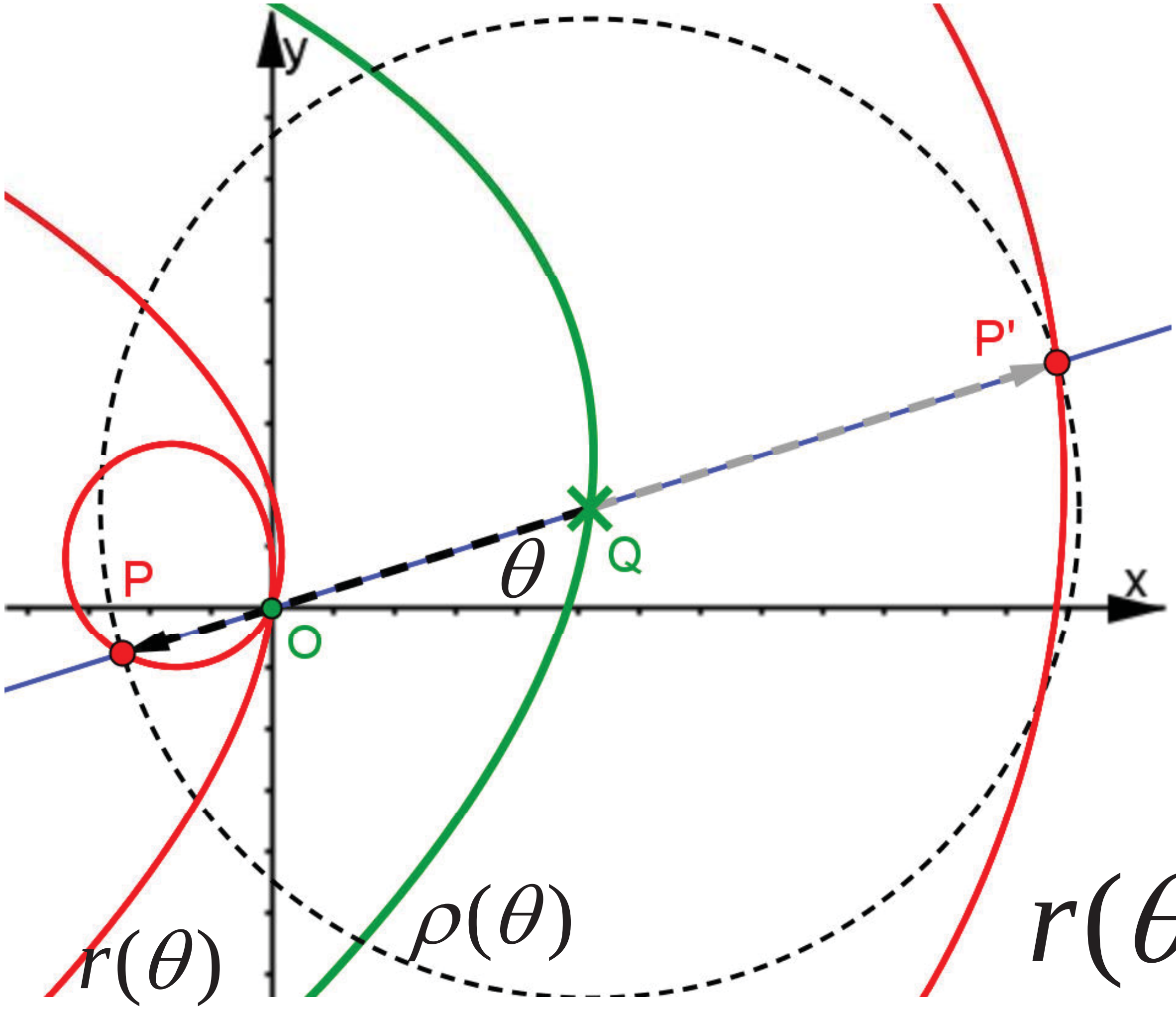


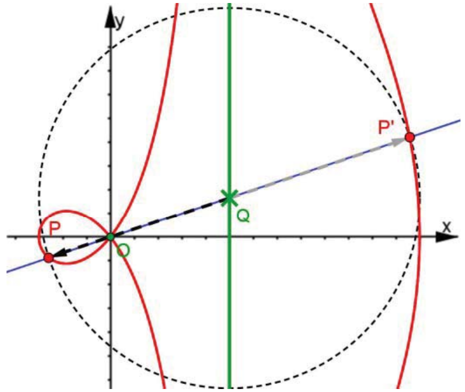
Cissoide

Alles so speziell! Erkunden????

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Konchoide



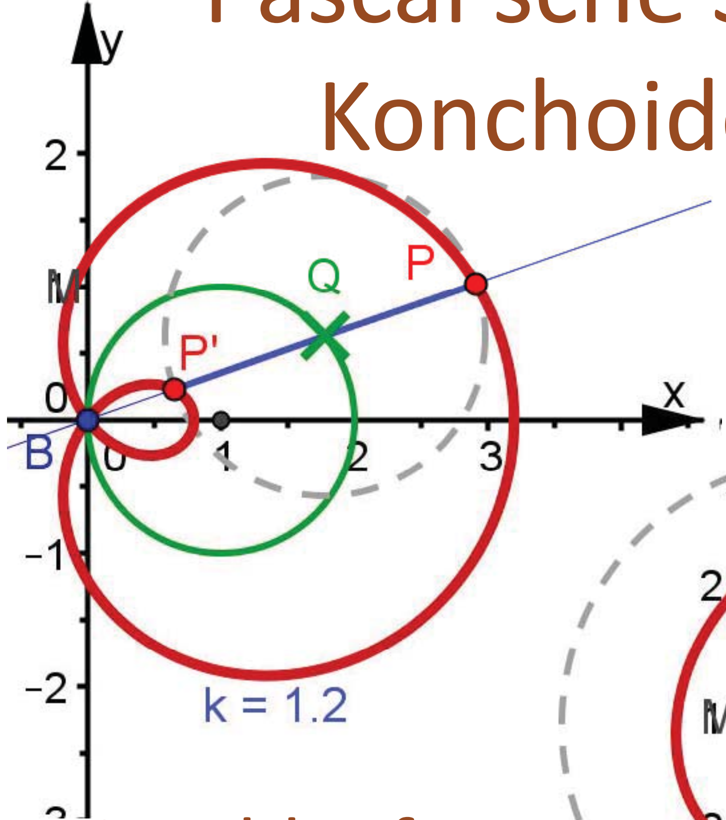


- Wanderkurve für Q beliebig
- Auf Fahrstrahl Leinenlänge k markieren

$$r(\theta) = \rho(\theta) \pm k$$

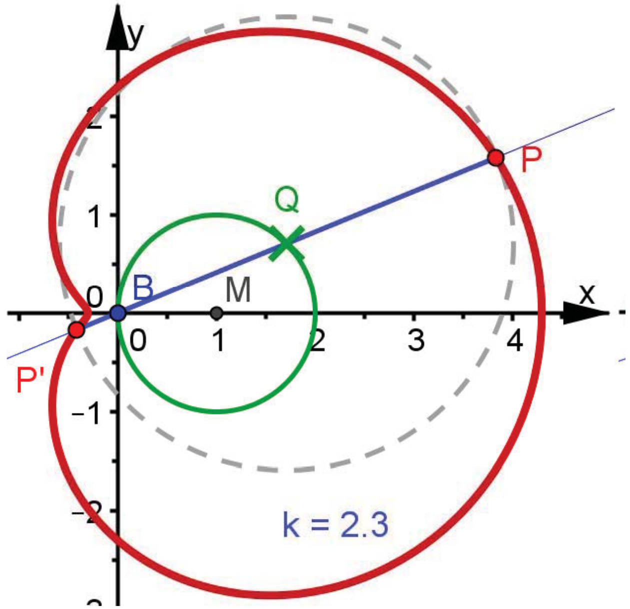
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

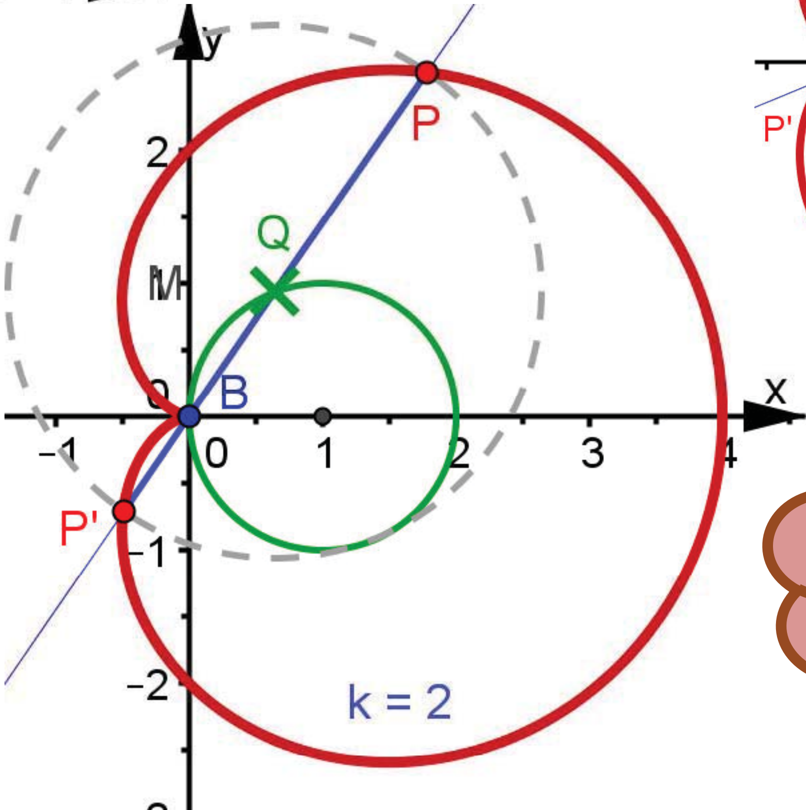
Pascal'sche Schnecken als spezielle Konchoiden mit „Kreisstraße“



mit Schlaufe

weder
Schlaufe
noch Spitze





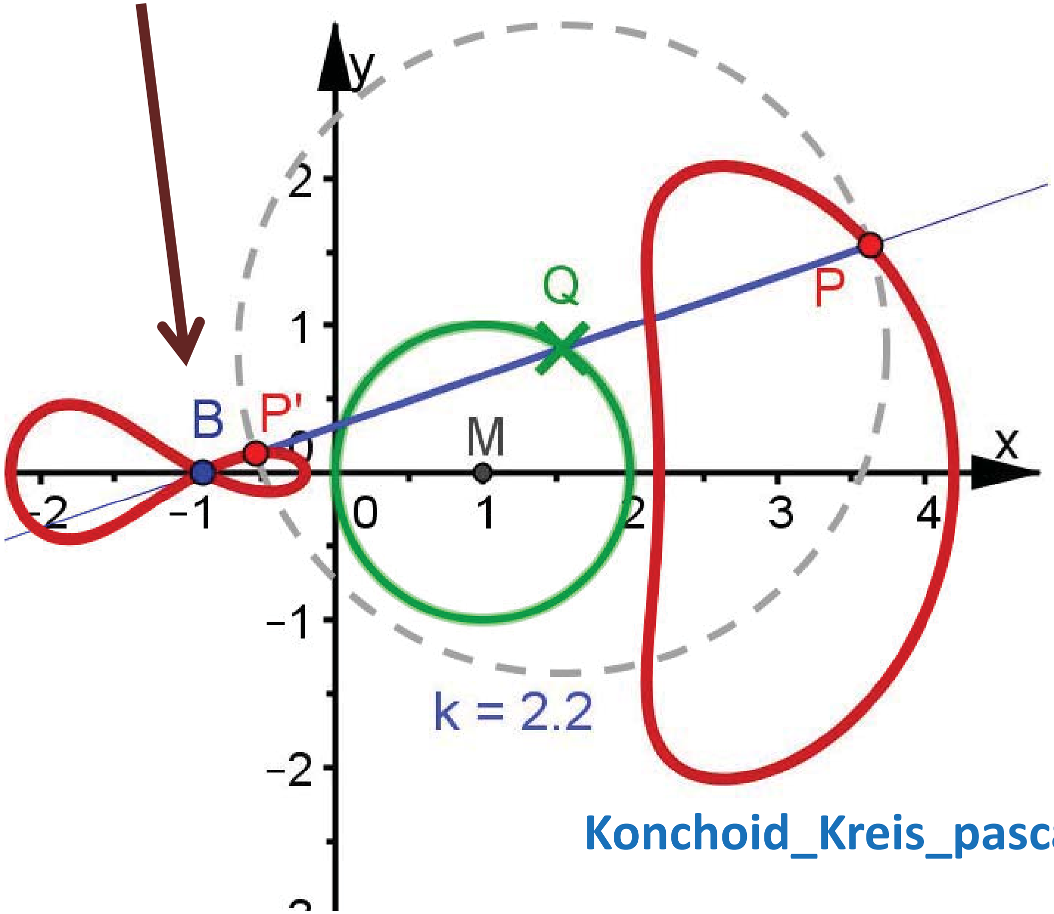
mit Spitze
Kardioide

Nun gut!
Aber **freies**
Erkunden?

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

allgemeinere Konchoiden mit anderen Wanderwegen

den Pol an andere Stelle legen

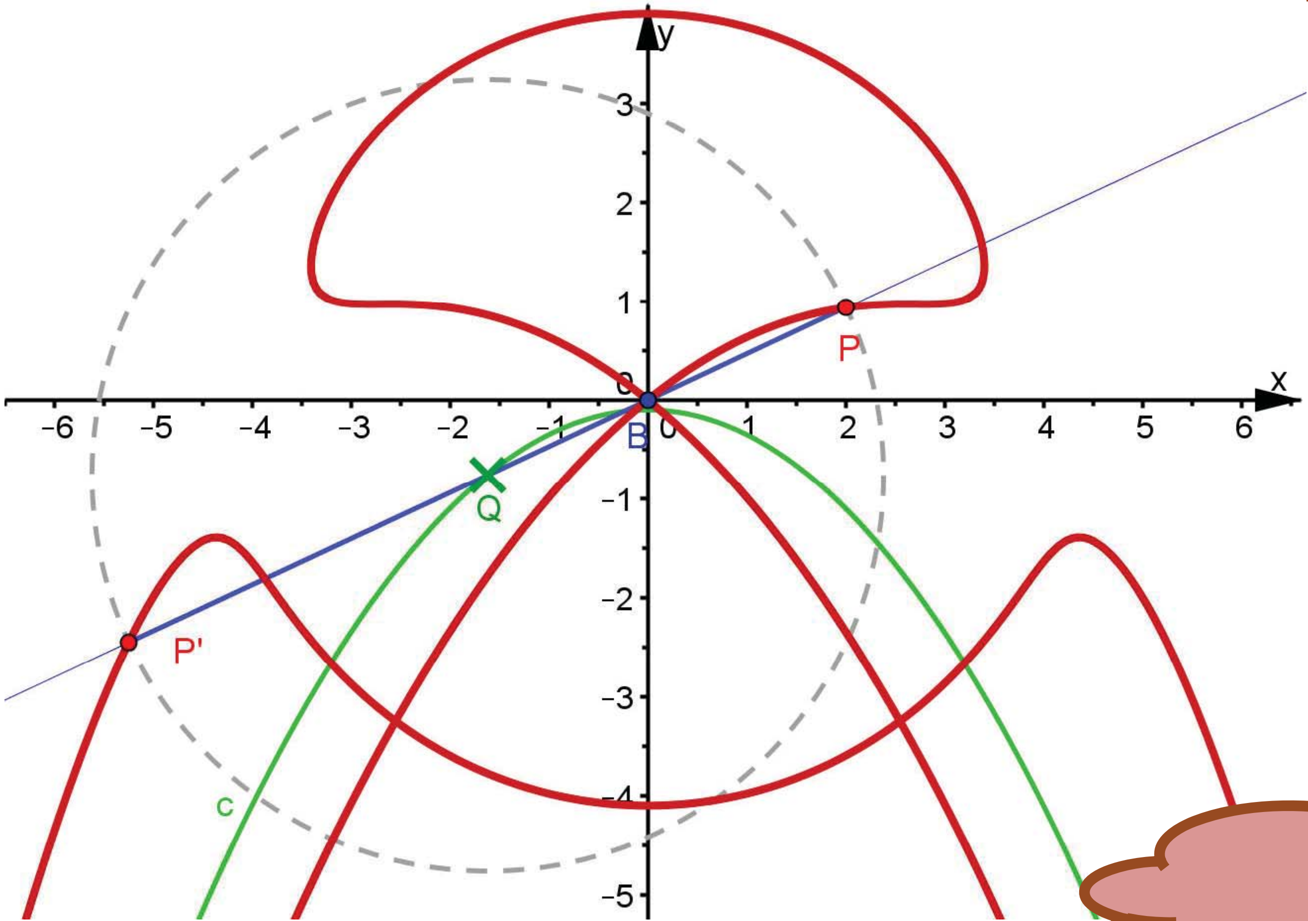


Nicht bloß angucken, sondern nachdenken: Warum hat man alle Fälle betrachtet, wenn B von +2 nach links rückt und man sonst nur k variiert?

Konchoid_Kreis_pascal.ggb

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

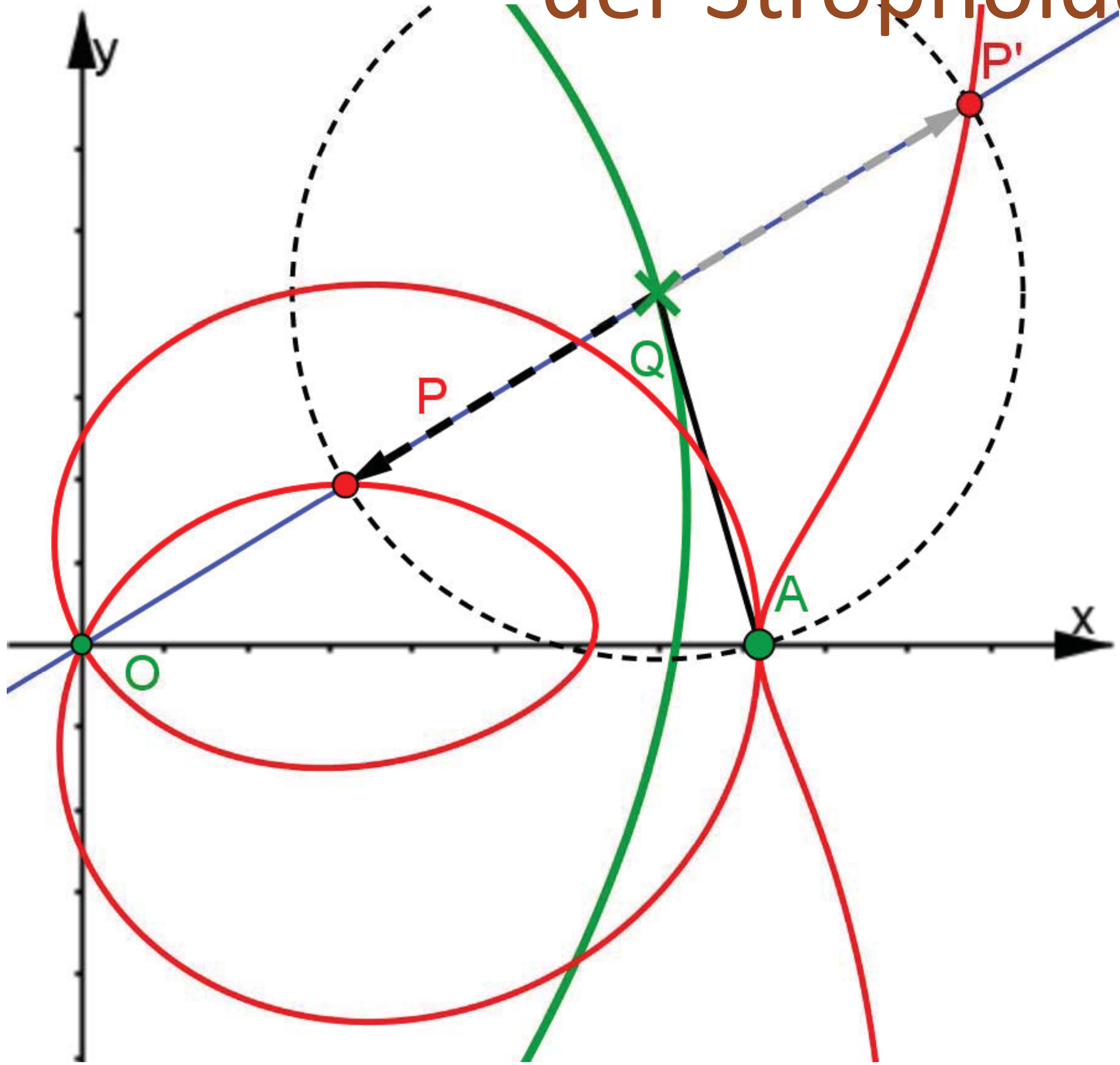
allgemeinere Konchoiden mit Parabel-Wanderwegen

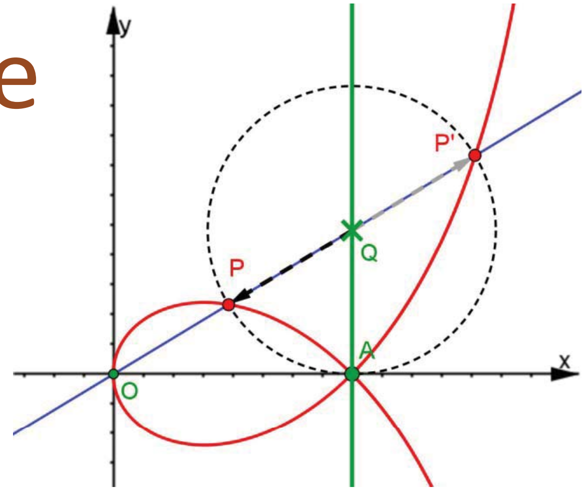


parabel-konch.ggb

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Strophoide

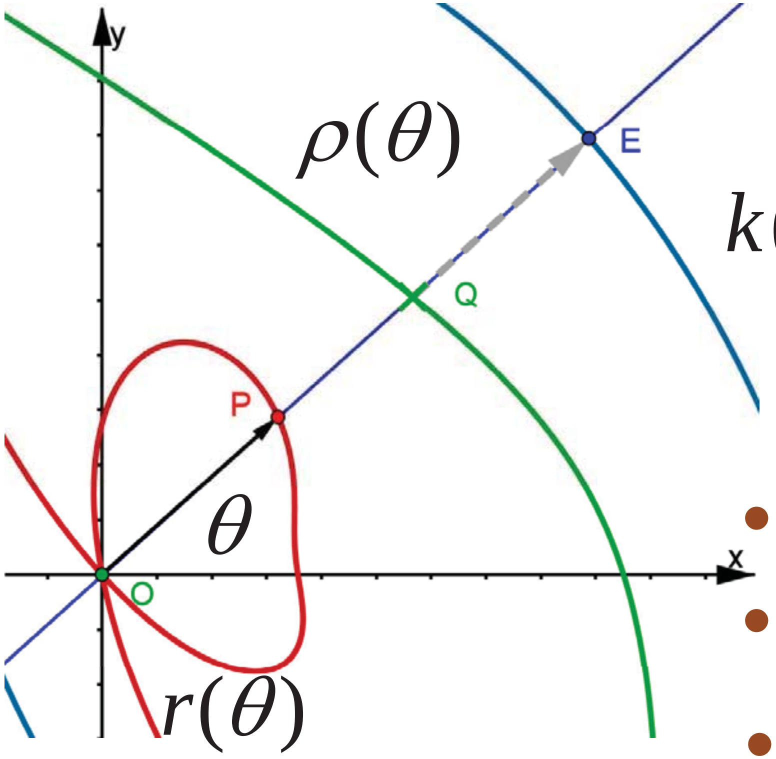


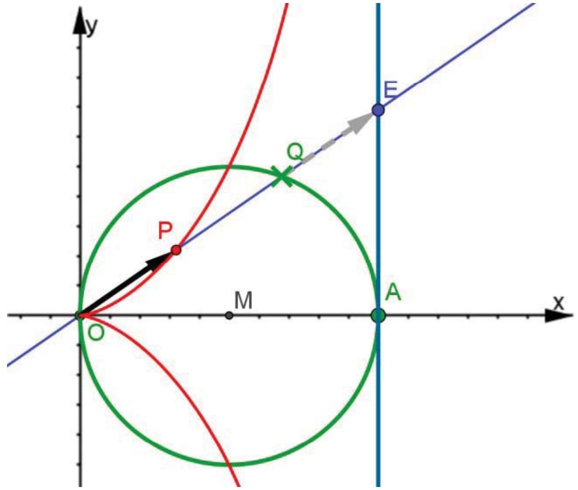


- Wanderkurve für Q beliebig
- Kreis[Q,A]
- Auf Fahrstrahl P und P‘

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide

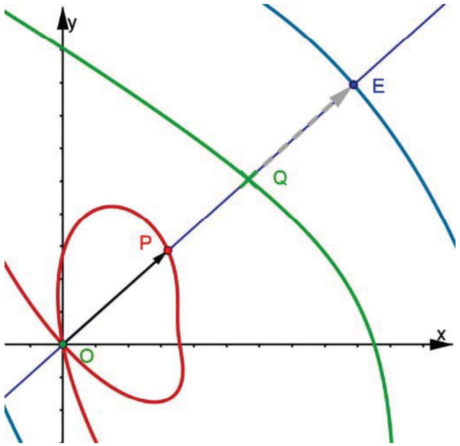


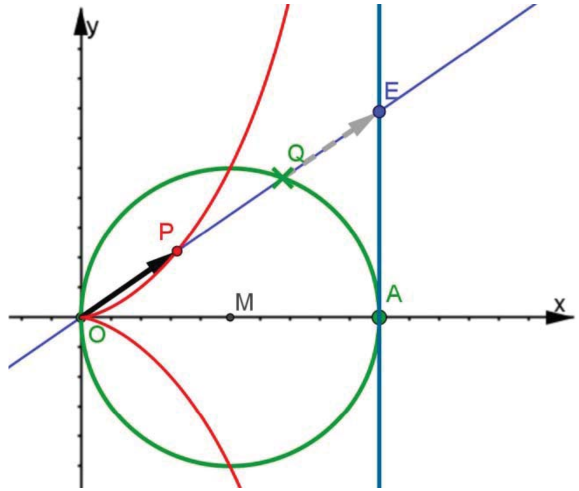


- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- Vektor QE an O anhängen ergibt P

$$r(\theta) = k(\theta) - \rho(\theta)$$

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide



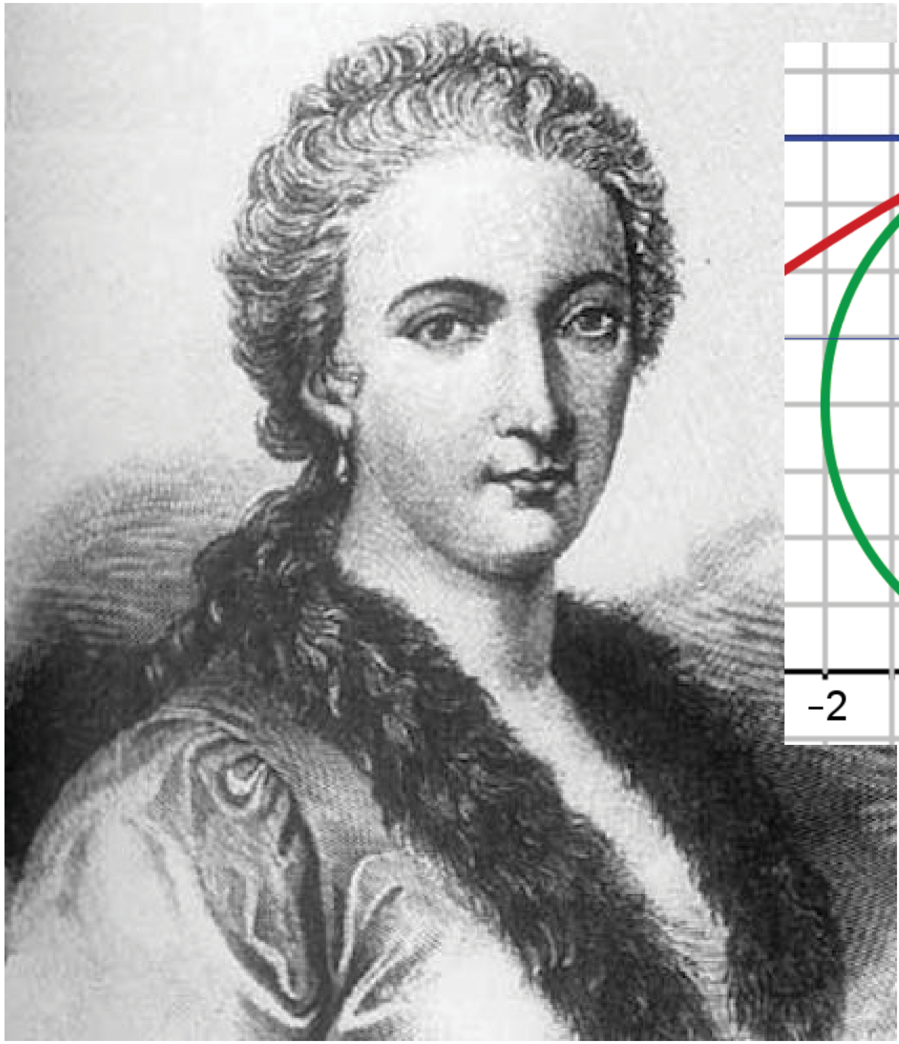


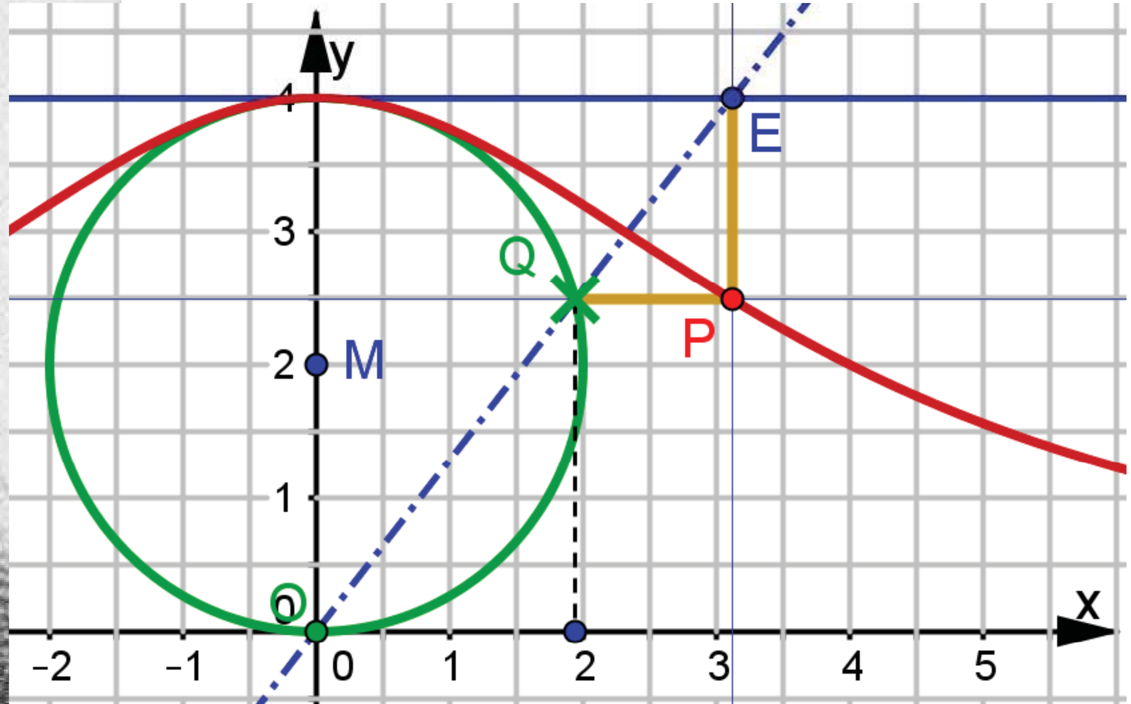
- Allg. Cissoide
  - Konchoide
    - Nikomedes
    - Pascal
      - Kardioide
  - Strophoide Standardform
  - Trisektrix v.Maclaurin
  - Lemniskate
  - Erfindungen

$$r(\theta)=k(\theta)-\rho(\theta)$$

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi 1748





$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

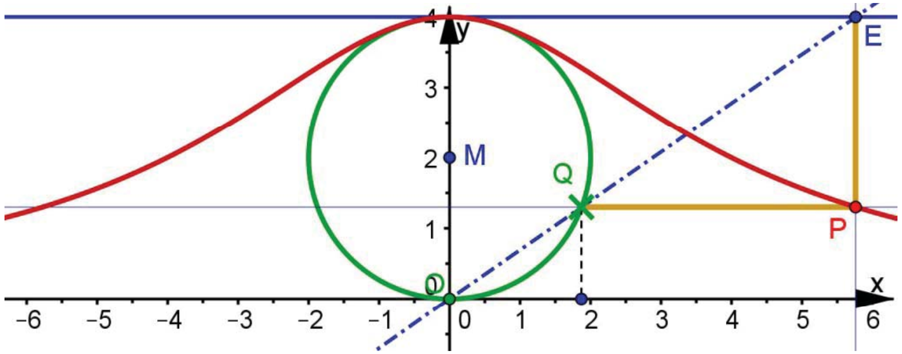
Tipp: solche „Rasterkonstruktionen" sind klausurfähig.

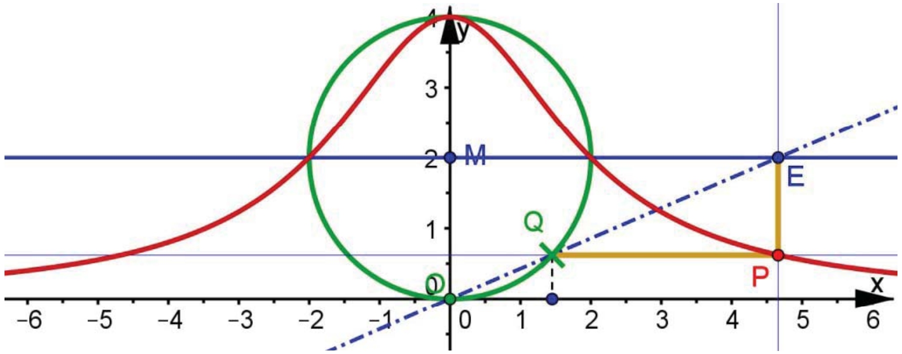
1718-1799

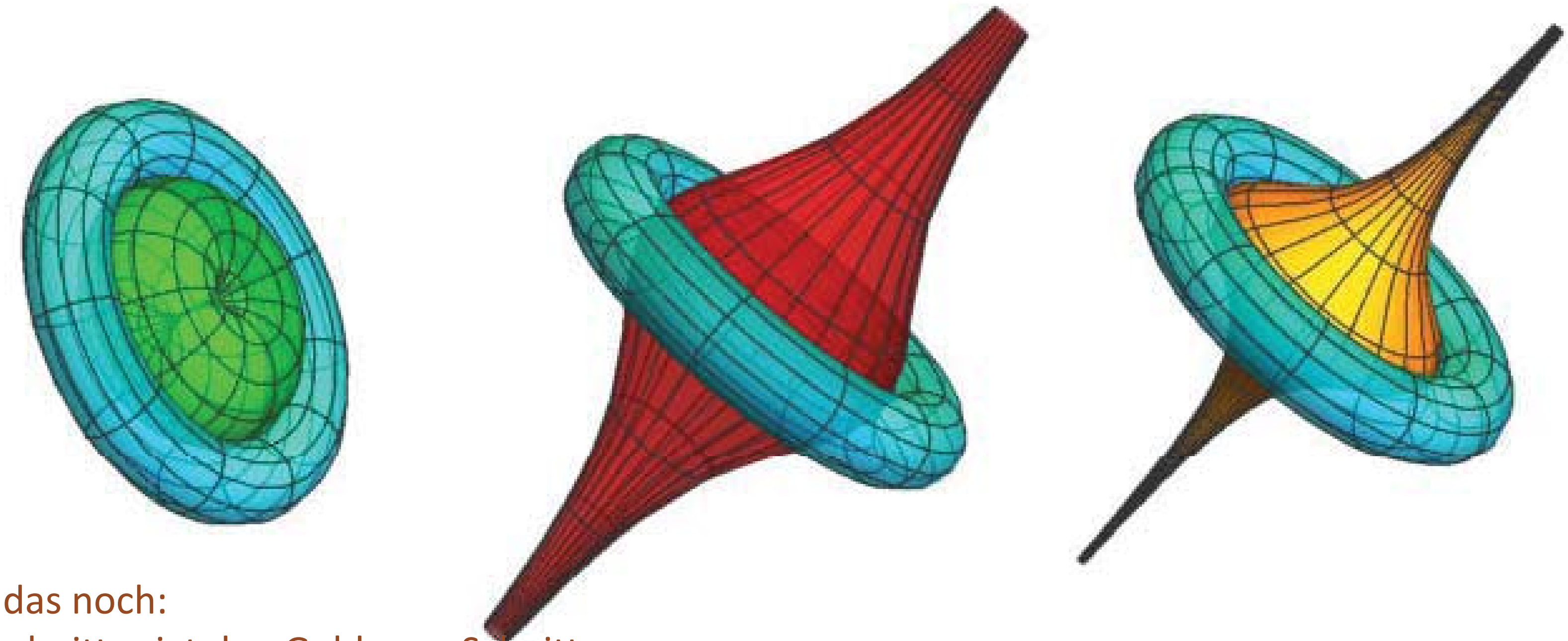
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi



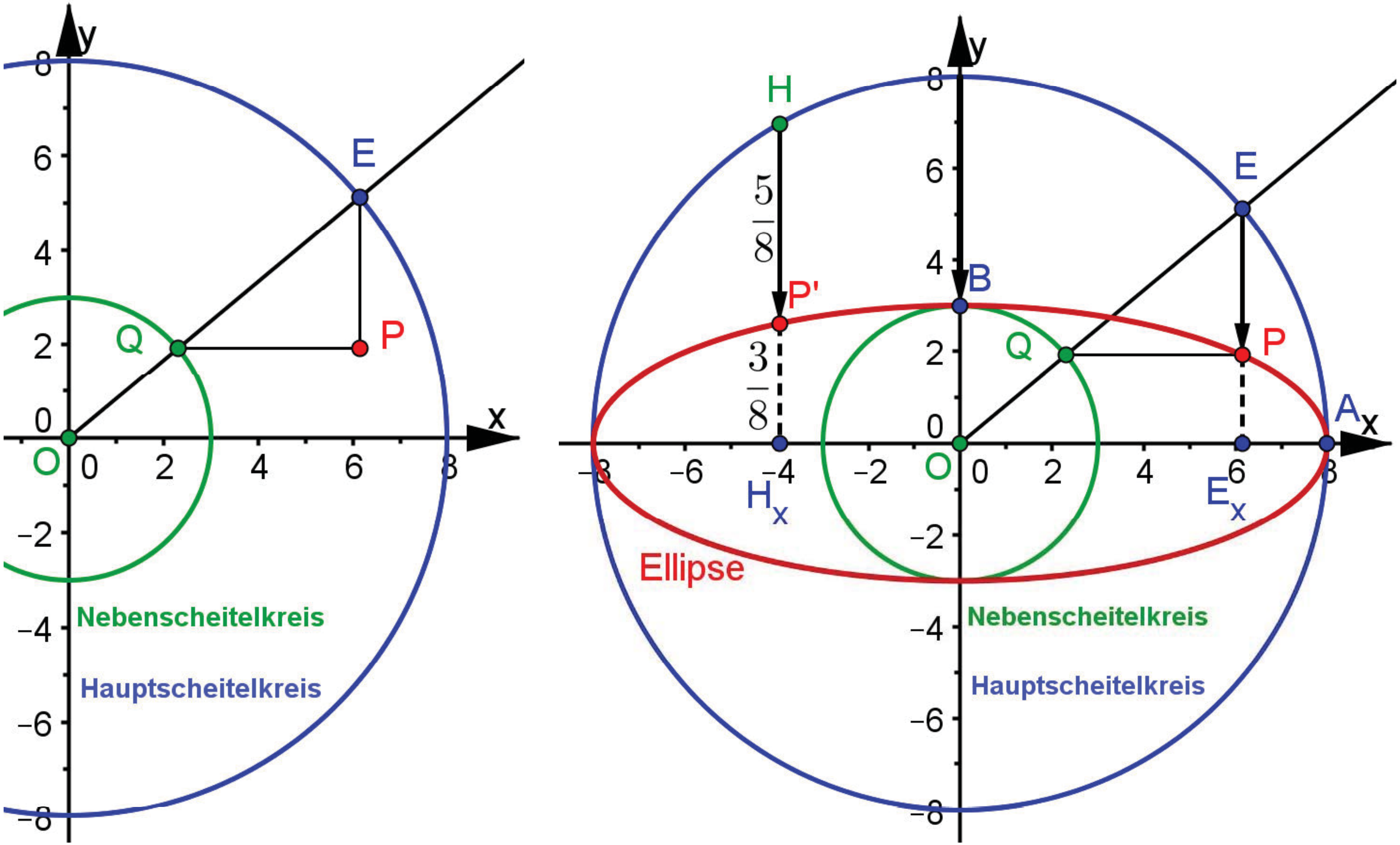




Auch das noch:
Querschnitt zeigt den Goldenen Schnitt

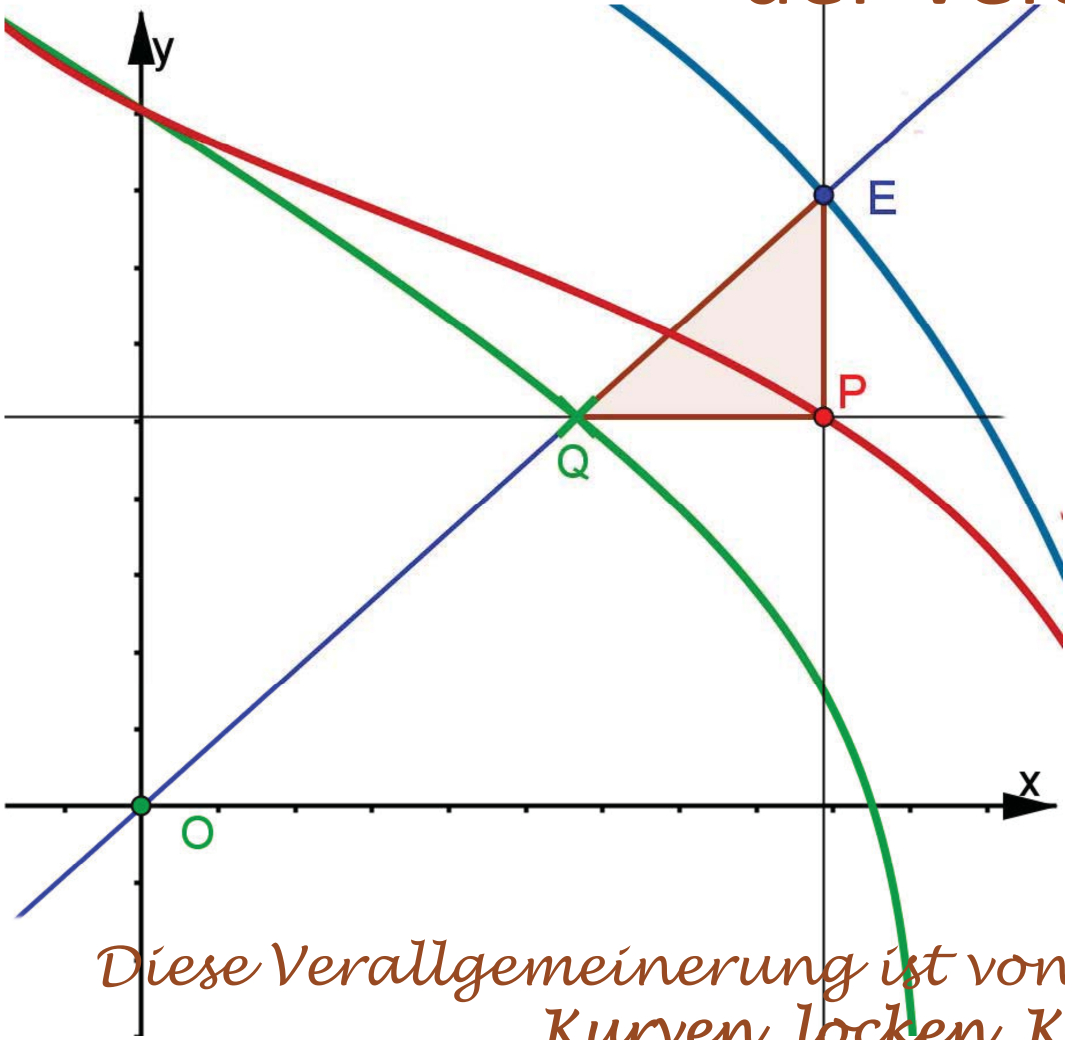
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Ellipse aus der Scheitelkreise-Konstruktion



www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Versiera



- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
  - Fahrstrahl schneidet C_2 in E
    - P=(x(E),y(Q))

P hat also die Abszisse von E und die Ordinate von Q

Diese Verallgemeinerung ist von mir, aber so ist es eben: Kurven locken Kreativität

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Die allgemeine Versiera verknüpft Geometrie und Analysis

Satz 3.8 (Gleichungen für die allgemeine Versiera)

Implizite Gleichungen (möglichst ohne Bruchterme) für einige wichtige Fälle

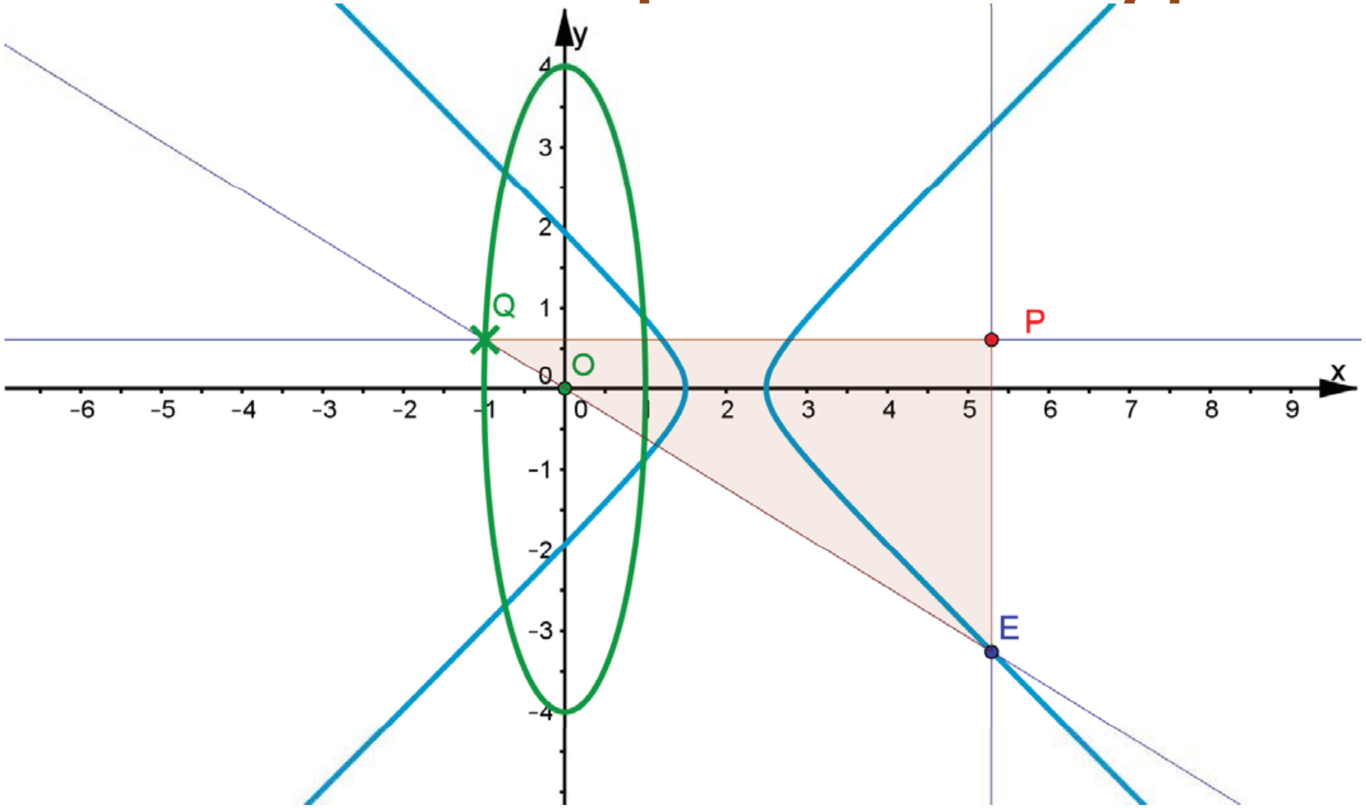
C_1	C_2	*allgemeine Versiera*
$y = f(x)$	$y = k(x)$	$y = f\left(\frac{x\,y}{k(x)}\right)$
Parabel $y = m\,x^2 - a$	$y = k(x)$	$(y+a)k(x)^2 = mx^2y^2$
$F(x,y) = 0$	$y = k(x)$	$F\left(\frac{x\,y}{k(x)}, y\right) = 0$
Kreis $x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$y = k(x)$	$x^2y = k(x)^2(2a-y)$
$F(x,y) = 0$	$K(x,y) = 0$	*Aus* $F(u,y)$, $K(x,t)$, $xy = ut$ *u und t eliminieren*

Vieles geht in GeoGebra-CAS, TI Nspire CAS o.Ä.

Elimination geht (für jeden) mit Wolfram-Alpha

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



[versiera-elli-hyp.ggb]()

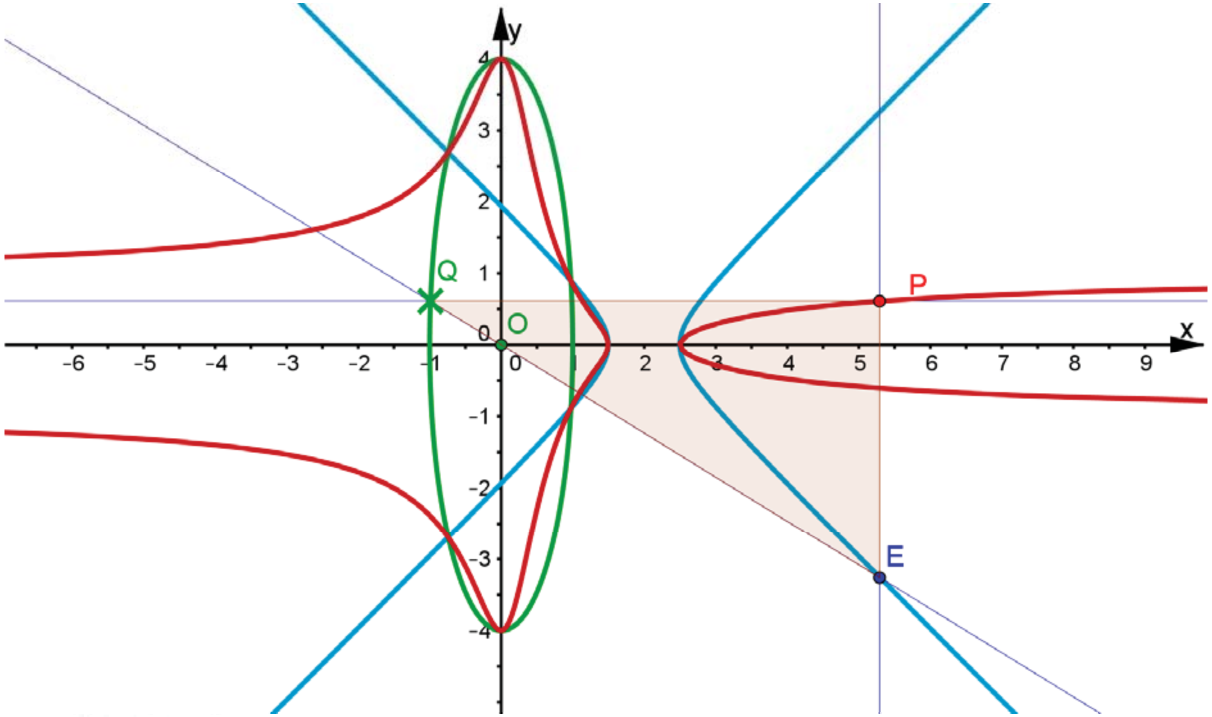
WolframAlpha computational knowledge engine

Eliminate[{u^2/a^2+ y^2/b^2==1,(x-2a)^2-t^2==s^2, x y == u t},{u,t}]

Examples Random

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



Result:

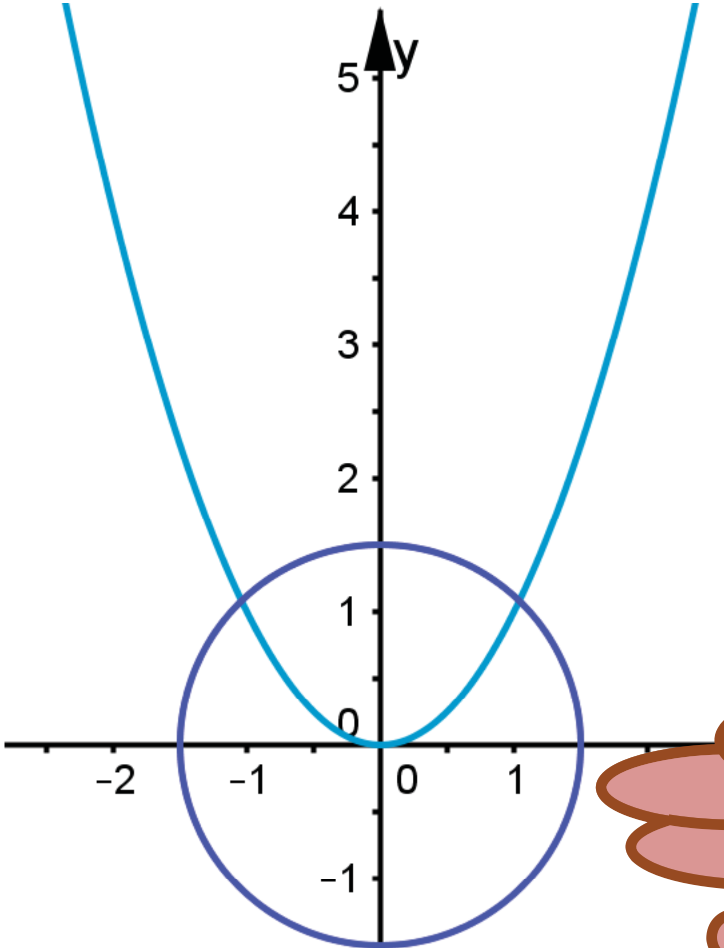
$$s^2\left(y^2-b^2\right)=\frac{b^2\,x^2\,y^2}{a^2}-4a^2\,b^2+4a^2\,y^2+4a\,b^2\,x-4a\,x\,y^2-b^2\,x^2+x^2\,y^2\bigwedge$$
$$a\neq 0\bigwedge b\neq 0$$

s^2 (y^2 - b^2) =
(b^2 x^2 y^2)/a^2 - 4 a^2 b^2 + 4 a^2 y^2 +
4 a b^2 x - 4 a x y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2 && a != 0 && b != 0

versiera-elli-hyp.ggb

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



$$(y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$$(y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = h$$

Wenn hier keine 0 steht?

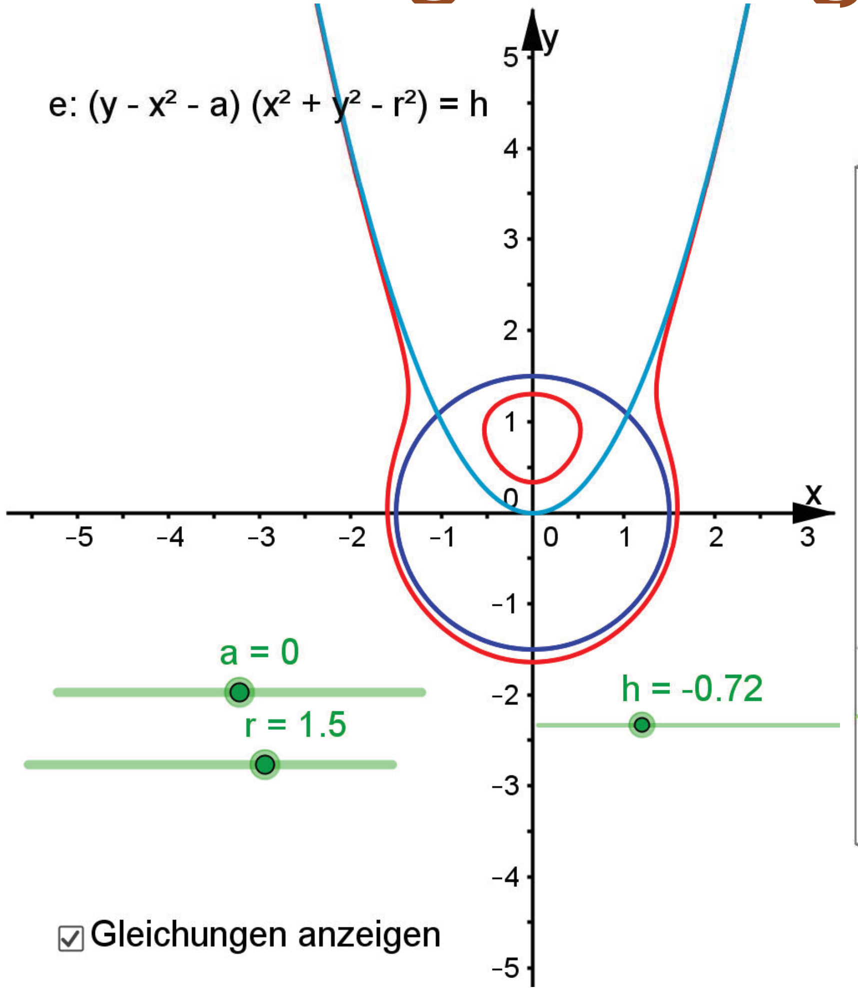
Dann hilft die 3D-Darstellung beim Verstehen

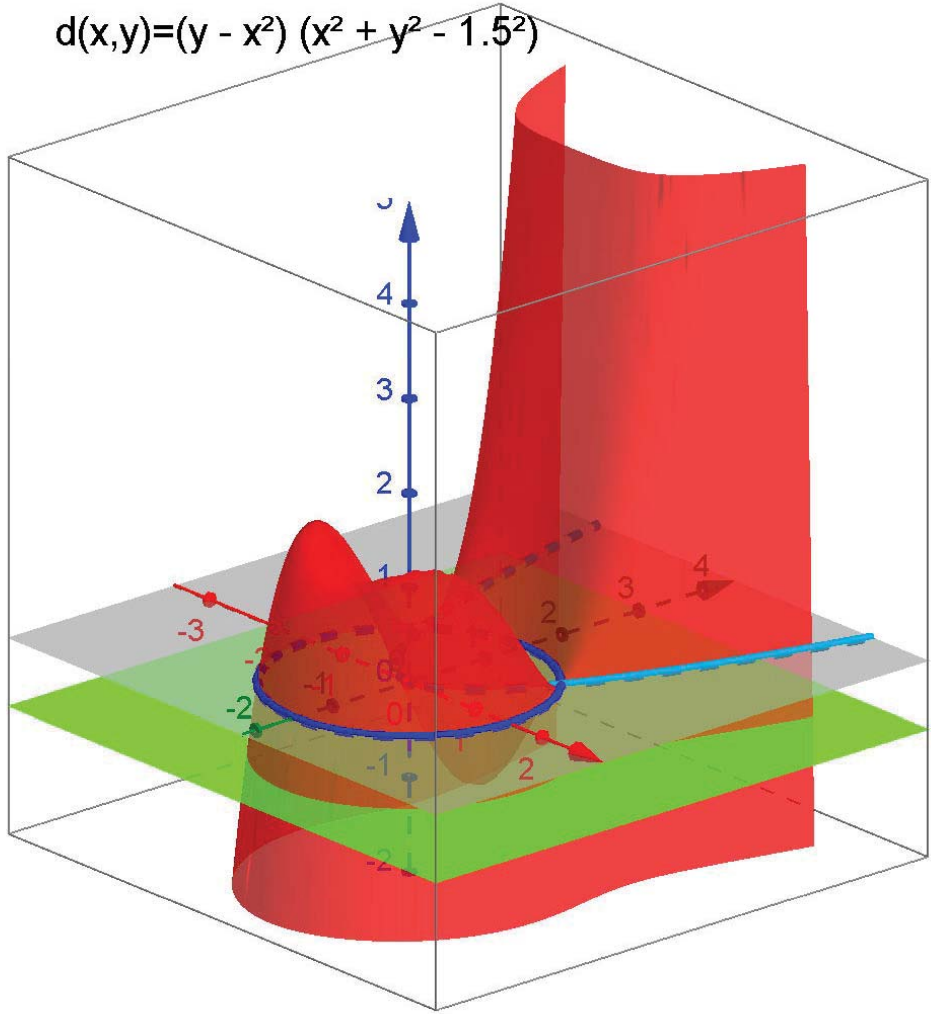
produkt-ohne3D

$$z = f(x,y) = (y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D

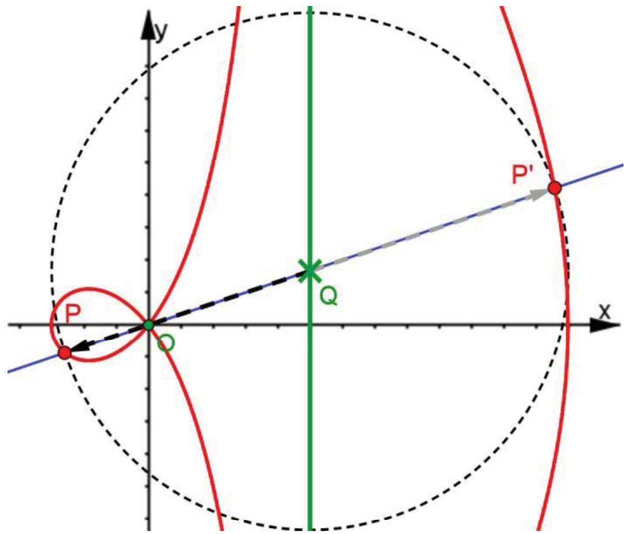


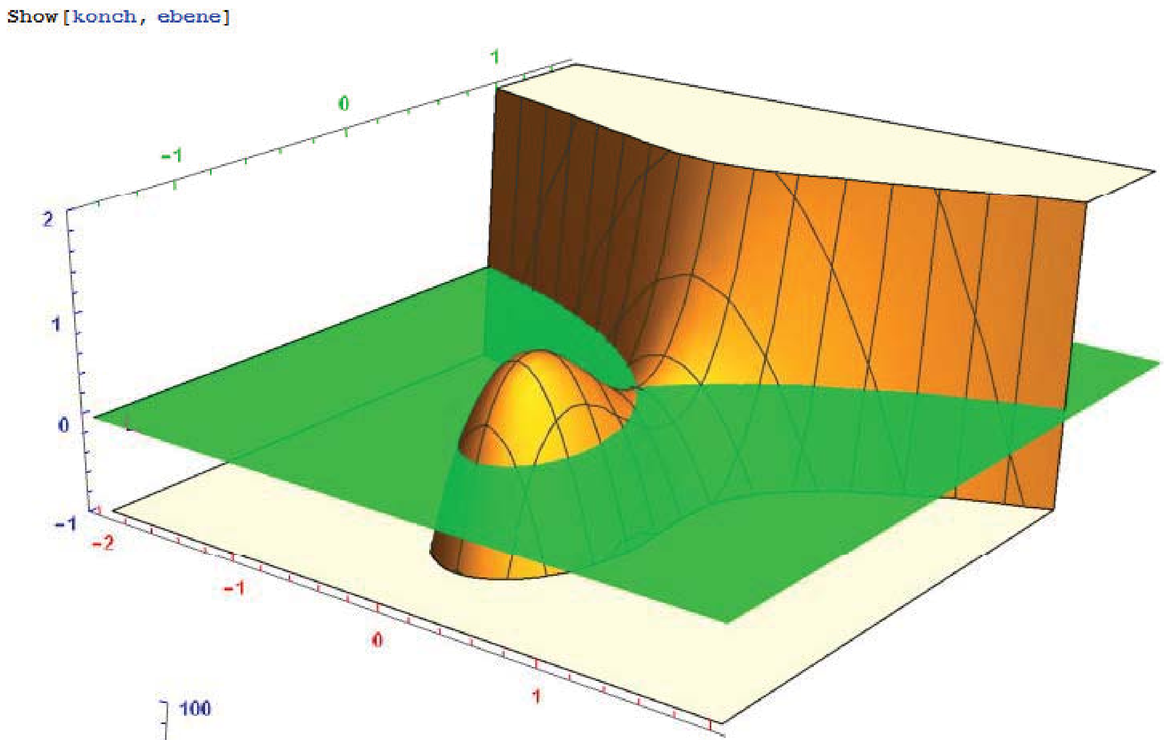


produkt3D Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

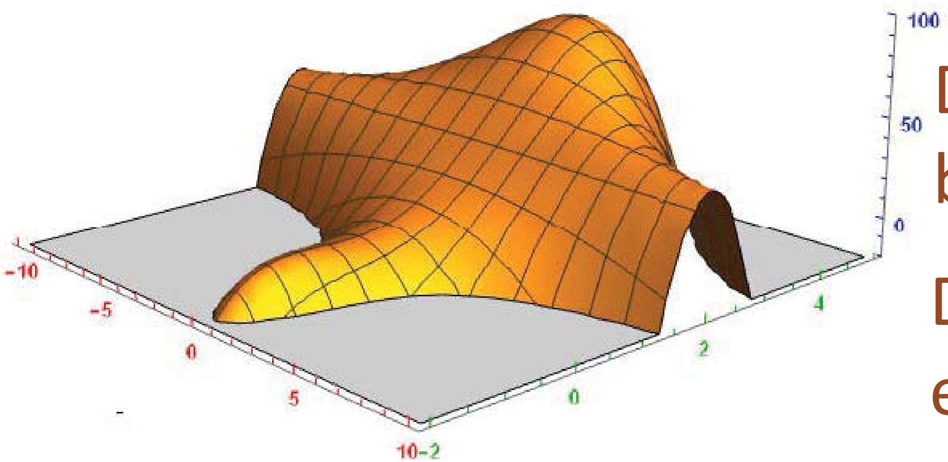
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

3D-Darstellungen anderer Kurven





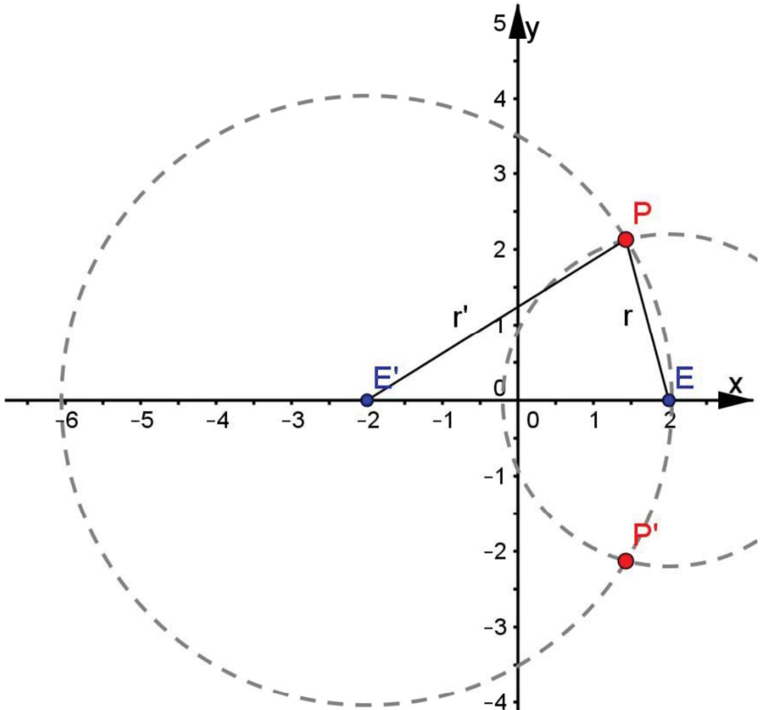
Konchoide

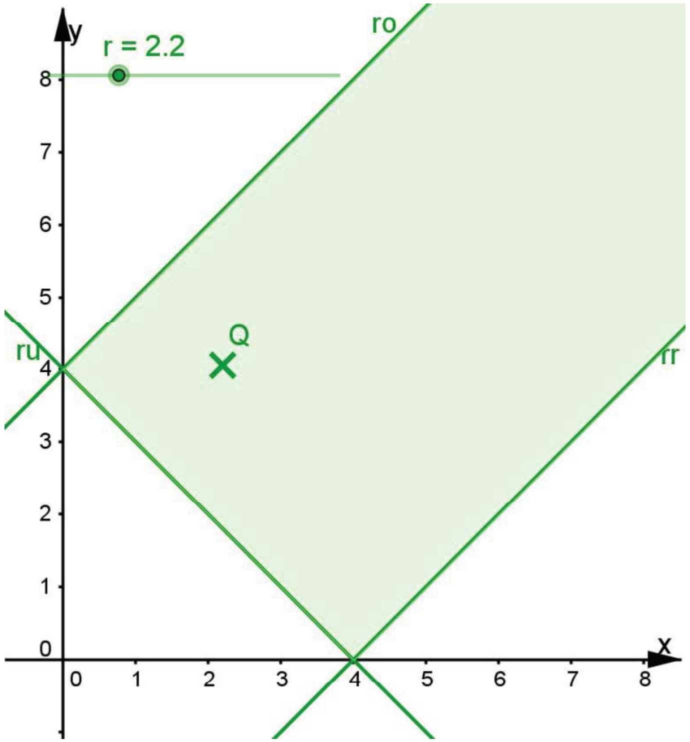


Durch Schnitte in anderer Höhe bilden sich Kurvenfamilien.

Doch manchmal kommt es anders als man denkt.

Allgemeine bipolare Kurven





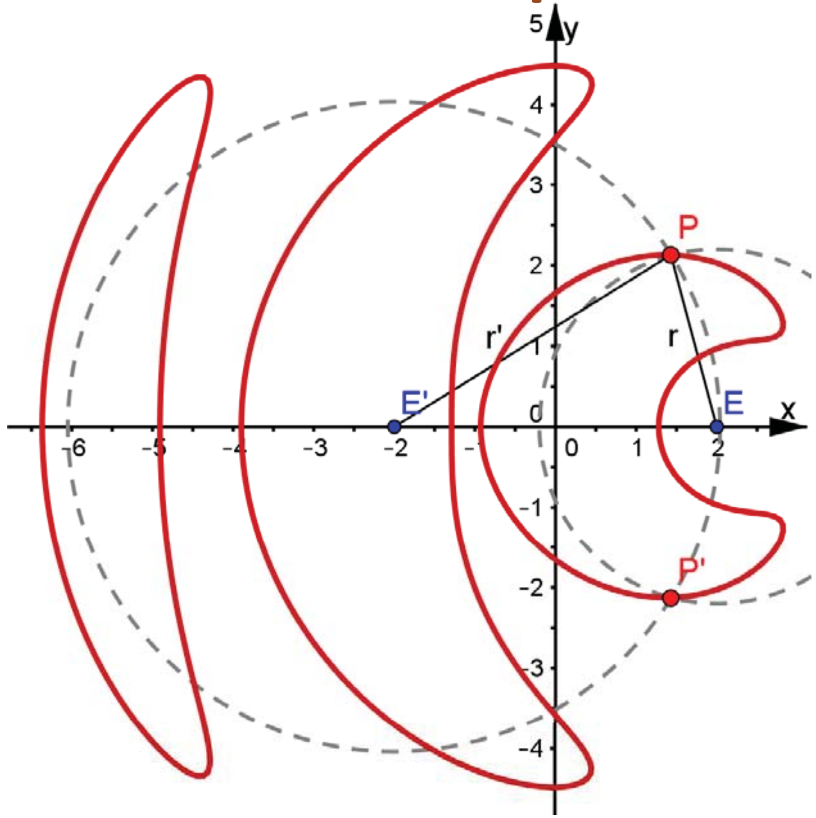
Visualisierung der Dreiecks-bedingung im zweiten Grafikfenster in GeoGebra. **gekoppelte Darstellung**

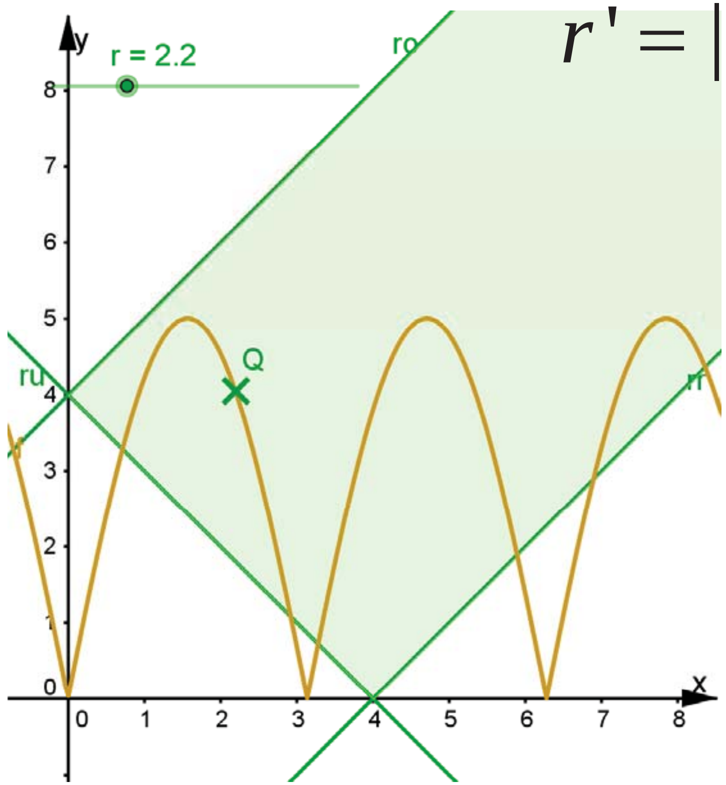
[bipolar-bereich-start-fkt]

Ein Punkt P habe die Abstände r und r‘ von zwei „Brennpunkten“ E und E‘ im Abstand 2e**. Jede Gleichung** von r und r‘ **definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E‘ eine Dreieck bilden.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Bipolare Sinus-Kurven



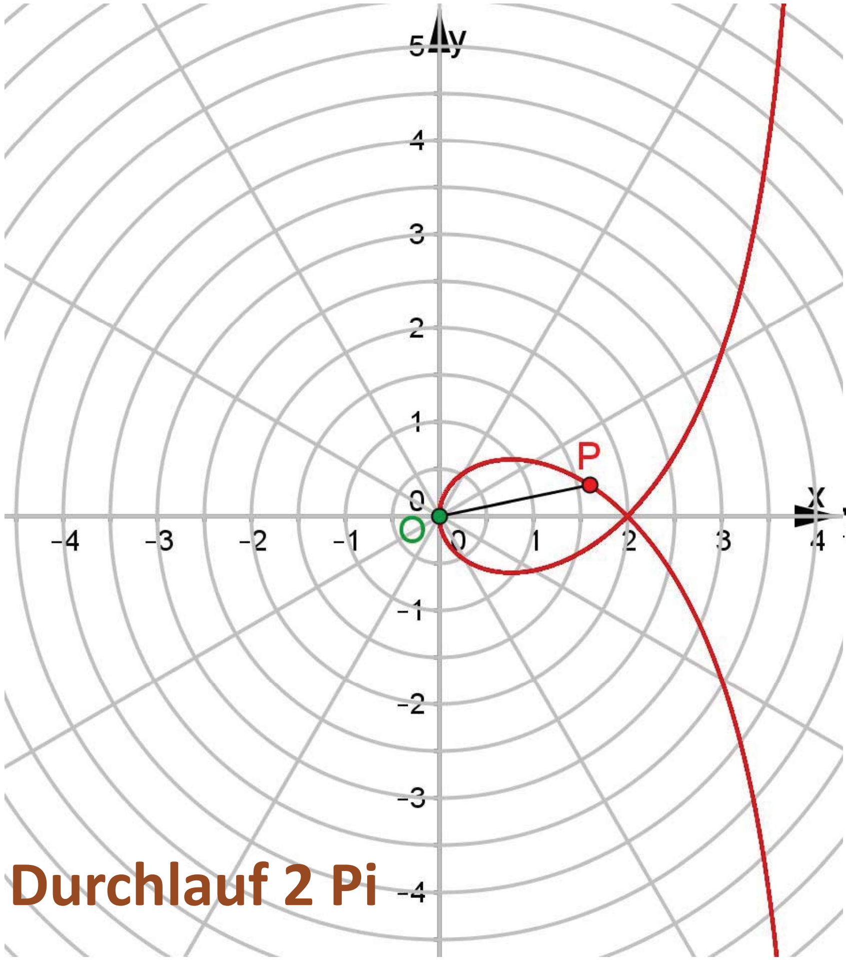


$$r' = |k \sin(r)|$$

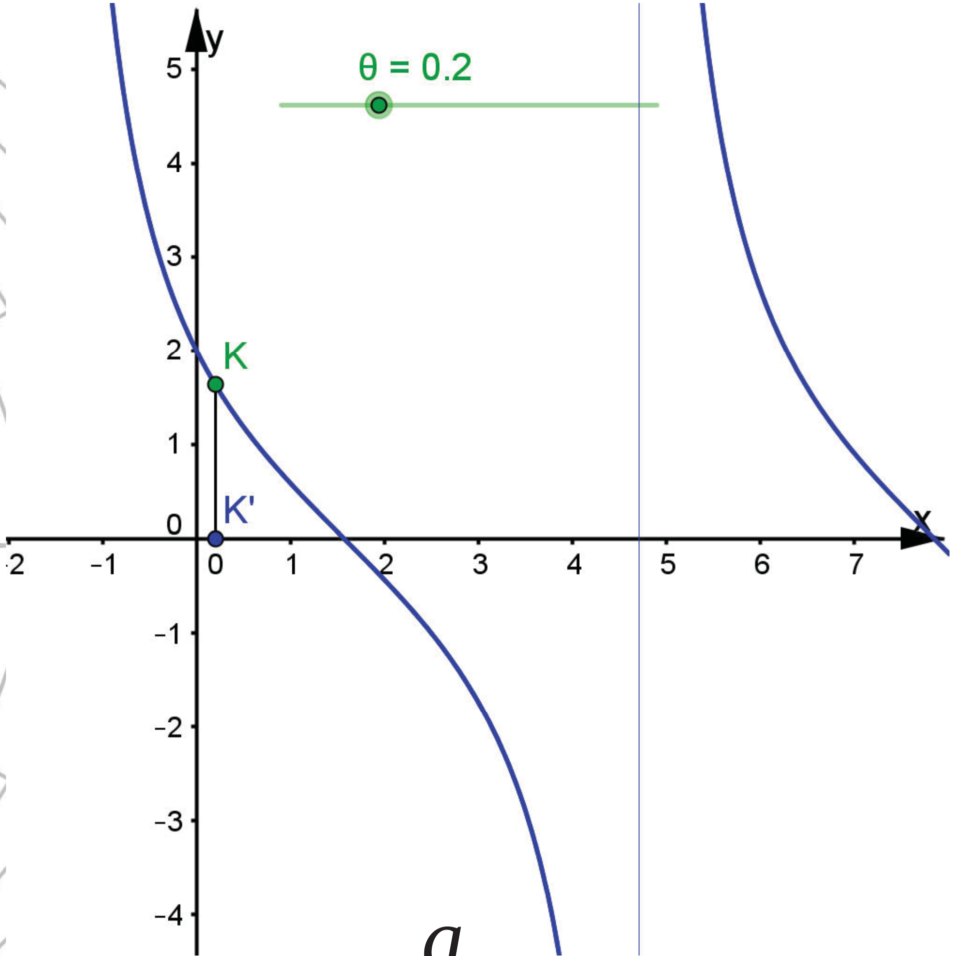
Durch die **gekoppelte Darstellung** kann man die Besonderheiten alle verstehen.

bipolar-bereich-start-fkt

Gekoppelte Polardarstellung



Durchlauf 2 Pi

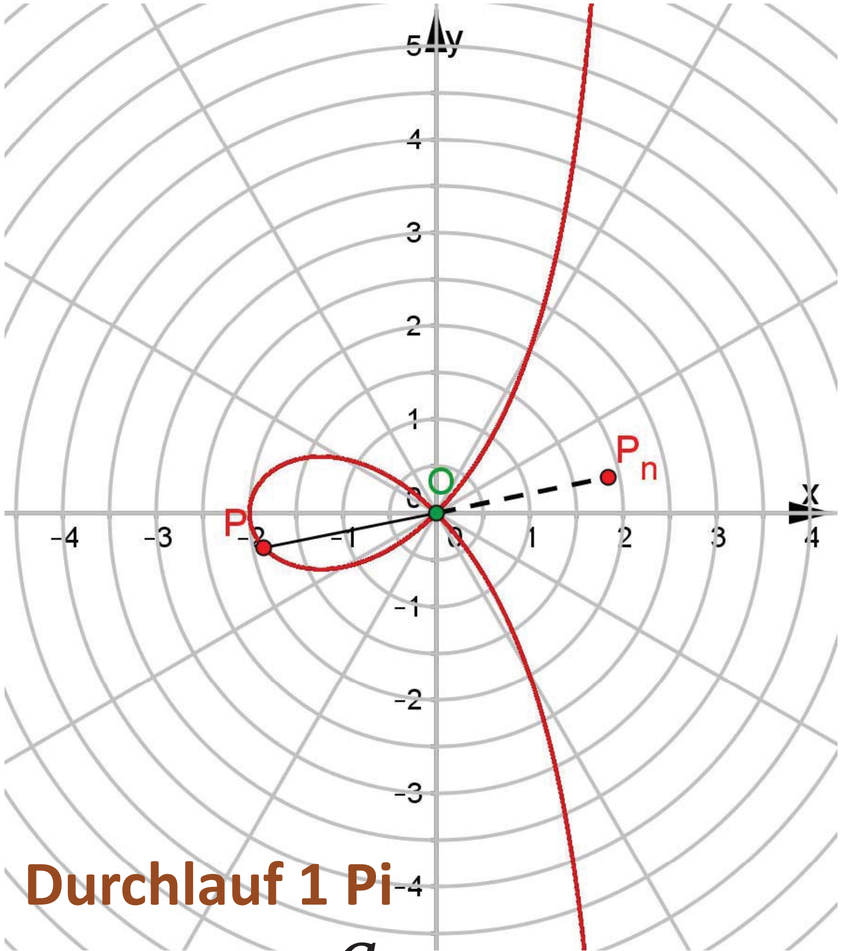


$$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - a\tan(\theta)$$

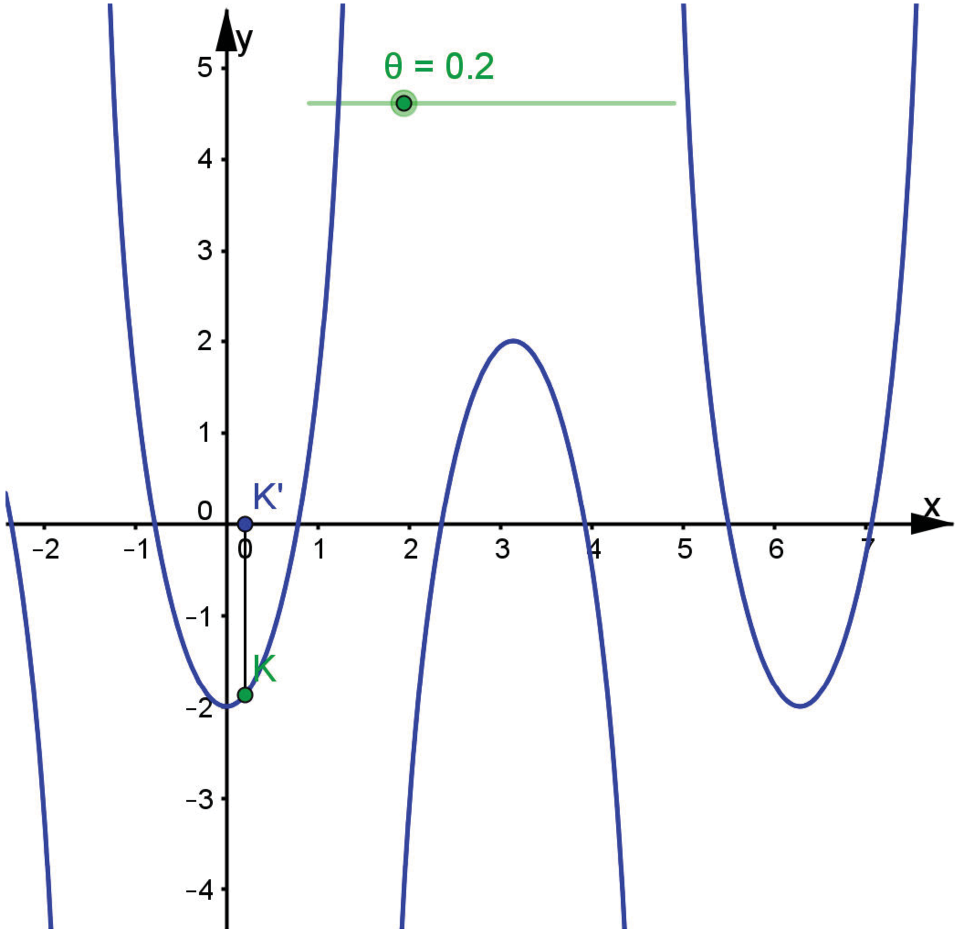
stropho-orig + vari

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Gekoppelte Polardarstellung



Durchlauf 1 Pi



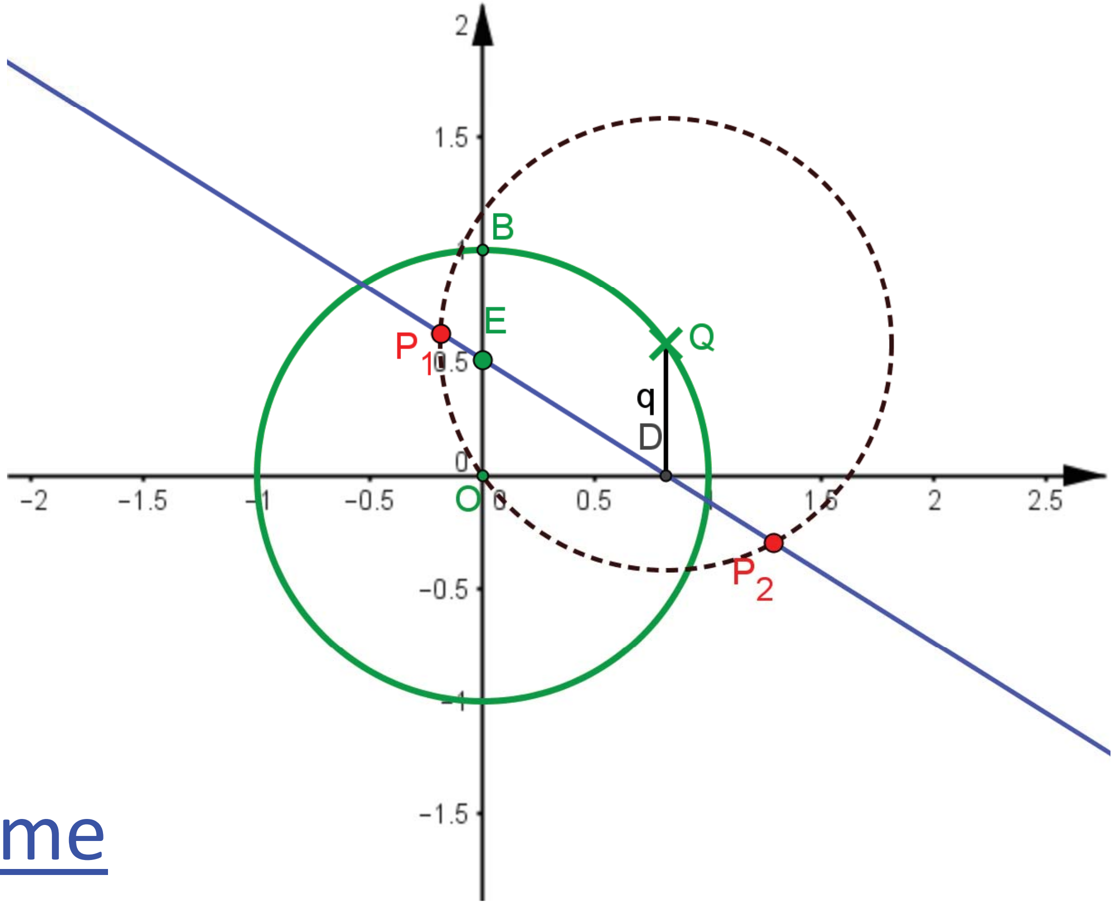
$$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - 2a\cos(\theta)$$

stropho-als-cisso

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Die Topfblume, eine freie Erfindung

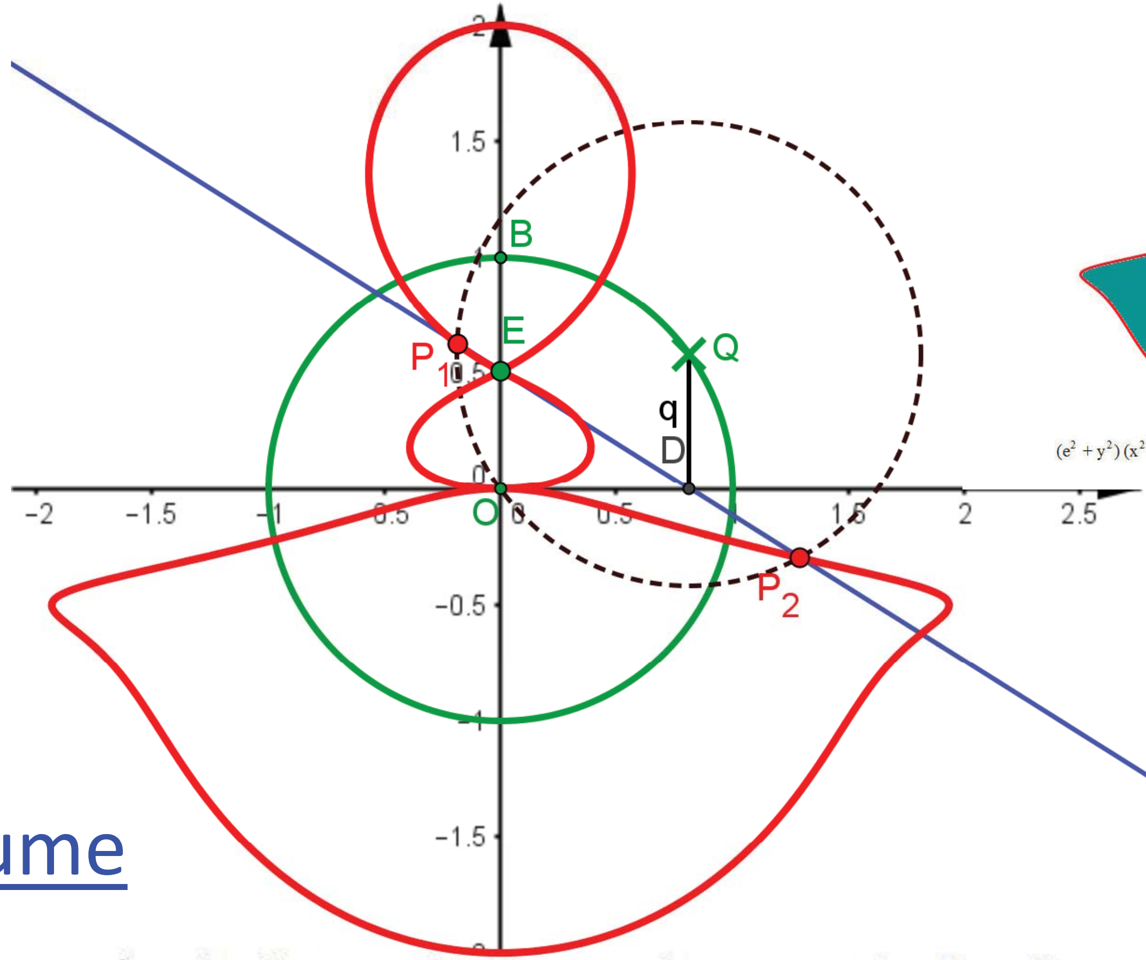
Von meinem Freund Prof. Riebesehl, einem Mathematiker, der sofort kreativ wurde, als ich mit dem Buch anfing.

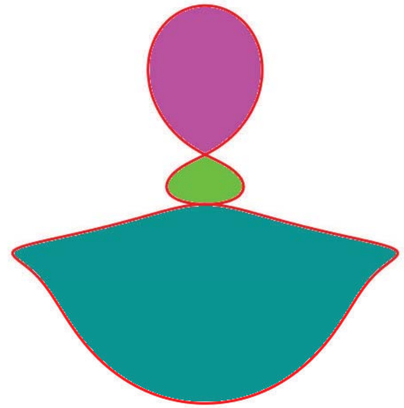


[Topfblume]

Die Topfblume, eine freie Erfindung

Von meinem Freund Prof. Riebesehl, einem Mathematiker, der sofort kreativ wurde, als ich mit dem Buch anfing.





$$(e^2+y^2)(x^2-2y+y^2)(x^2+2y+y^2)==2ey(y^4-x^4-4y^2)$$

[Topfblume]()

$$(e^2+y^2)(x^2-2y+y^2)(x^2+2y+y^2)==2ey(y^4-x^4-4y^2)$$

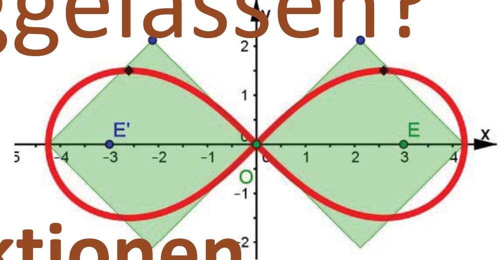
Was habe ich im Vortrag weggelassen?

Sehr

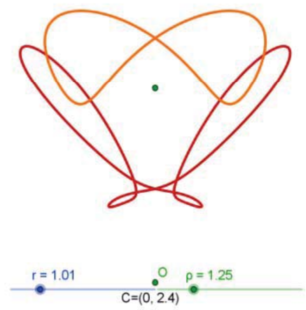
viel !

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

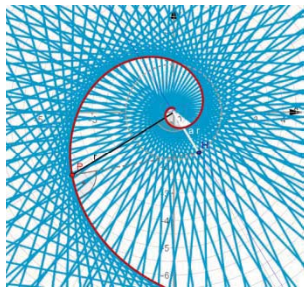
Was habe ich im Vortrag weggelassen?



- Elemente der **Analysis**
- Erfindungen durch **eigene Konstruktionen**
- Erfindungen durch **eigene Gleichungen**



- **Andere Erzeugungsweisen** von Kurven
  - **Hüllkuven** jeder Art: von Tangenten, vo Normalen, von Kreisscharen….
  - Fußpunktkurven, **Inversion** am Kreis
  - **Spiralen** und **Rosetten**
  - **Zykloiden**



- Kurven für die unlösbaren Probleme
- Kegelschnitte, Anwendungen in der Technik

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Bestandsaufnahme:

2000 Jahre Mathematik-geschichte mit Kurven

50 Jahre (curriculares) Schweigen

Eine 5 pt Schrift gibt es gar nicht!

Meine didaktisch nutzbare Literatur:

Hermann Schmidt 1949: Ausgewählte Kurven

Lockwood 1961: A Book of Curves

Schupp 1993: Höhere Kurven, Kegelschnitte

Steinberg 1995: Polarkoord. u.a.

+ Einzelnes und Versprengtes

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Diagnose

Die Mathematiklehre leidet an
akuter Magersucht.

Die Mathematiklehre ist schon
schlapp und kraftlos geworden,
dass sie die jungen Menschen nicht
durch‘s Studium tragen kann.

Wege zur Heilung

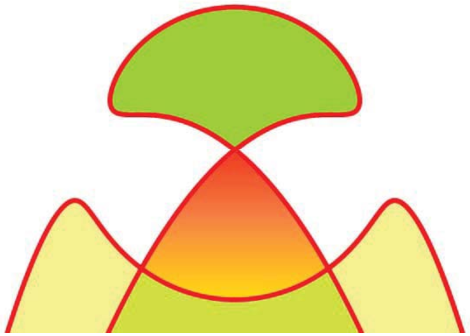
Wir sind **Berufsoptimisten** in Sachen Mathematiklehre!

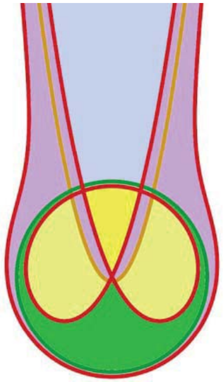
Viele, die hier sitzen, bemühen sich seit Jahren!

Gemeinsam sind wir stärker!

Dieses war mein Beitrag für heute!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!





www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de