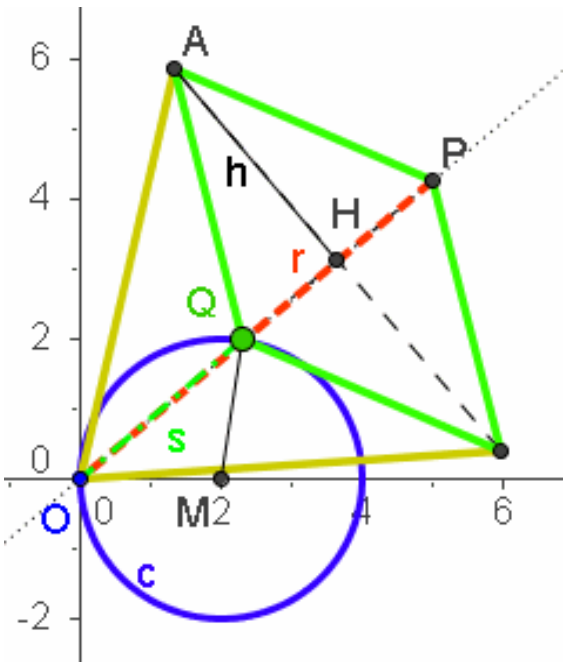
Inversion durch Gelenk Inversor des Peucellier

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 10.05.05



Diese Gelenkkonstruktion setzt eine Kreisbewegung in ein perfekteGeradenbewegung um. Dieses wurde lange für unmöglich gehalten. Peaucellier erfand diesen "Inversor" 1864.

Um das nachzuweisen, muss man zeigen, dass $r\,s = k^2$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten *k*. Die grünen Stangen Haben die festen Längen $a = \overline{AP} = \overline{AQ} = \ldots\; b = \overline{AO} = \ldots$

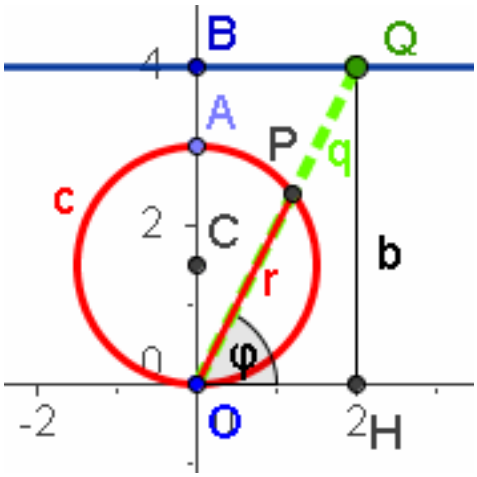
Mit $d = \overline{QH}$ gilt $a^2 = h^2 + d^2$ und $(s+d)^2 = b^2 - h^2$ und $r = s + 2d$, also

$$r\,s = s^2 + 2sd = (s+d)^2 - d^2 = b^2 - (h^2 + d^2) = b^2 - a^2 =: k^2$$

Der vorletzte Term kann nicht negativ werden, daher darf man ihn k^2 taufen.
Also bewirkt die Stangenkonstruktion tatsächlich eine Inversion am Kreis.
Wie kann man den Inversionskreis finden?

Satz: Kreise, auf deren Rand der Ursprung liegt und Geraden sind inverse Bilder voneinander bei einer Inversion am Kreis um den Ursprung mit Radius k.

Beweis: O.B.d.A. kann man den rechts abgebildeten Spezialfall wählen.



Es gilt $b = q\,\sin(\varphi)$ und für P(x,y)

$x^2 + (y-R)^2 = R^2$, mit den üblichen Bezeichnungen folgt $r^2 - 2R\,r\,\sin(\varphi) = 0$, also $r = 2R\sin(\varphi)$. Zusammen

$$r\,q = 2R\sin(\varphi)\frac{b}{\sin(\varphi)} = 2Rb =: k^2$$

Damit sind die Gerade und der Kreis inverse Bilder voneinander, wenn der Inversionkreis (Kreis um den Unsprung) den Radius k hat. Speziell sind B und A Bilder voneinander. Q.e.d.