Gerono’sche Lemniskate mit zwei Parametern

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Feb. 2018,
www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
Anlass: Logo der Berliner Mathematischen Gesellschaft

Originale Gerono’sche Lemniskate

```
{a =., b =.};
```

```
para1 =  2 a y == a^2 - x^2;
para2 = 2 a y == x^2  - a^2;
```

Konstruktion als Mittenkurve, siehe Buch Seite 117 Kap 4.4.2.1, Herleitung dort, aber auch hier mir der Verallemeinerung: das linke a wird b.

kartesisch $\quad x^4 = a^2(x^2 - y^2) \quad$ polar $\quad r^2 = a^2 \dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)^4} \qquad (4.33)$

Im Vergleich zum Logo der BMG ist dies zu flach.

Anpassung der originalen Gerono’schen Lemniskate

```
{a =., b =.};
```

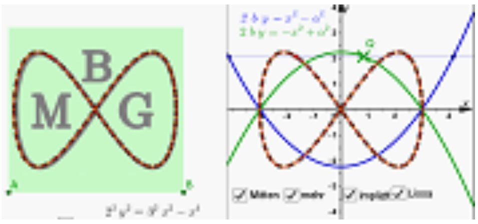
```
para1 =  2 b y == a^2 - x^2;
para2 = 2 b y == x^2  - a^2;
```

Konstruktion als Mittenkurve, Herleitung mit der Verallemeinerung: das linke a wird b.

Q=(u,v) auf Grün; S=(s,t) auf Blau, y=v=t , x=$\frac{u+s}{2}$

$$\text{Eliminate}\left[\left\{2\,b\,y == -u^2 + a^2,\ 2\,b\,y == s^2 - a^2,\ x == \frac{u+s}{2}\right\},\ \{u,\ s\}\right]$$
eliminiere

$$-b^2\,y^2 == -a^2\,x^2 + x^4$$



Ich habe a=3 gewählt, mit b=2 passte das Bild.

In[1]:= **Gerono = x^4 == $a^2\, x^2 - b^2\, y^2$**

Out[1]= $x^4 == a^2\, x^2 - b^2\, y^2$

Dass **Logo der BMG** hat also mit $b = \frac{2}{3}\, a$ die Gleichung

$$9\, x^4 = a^2\, \left(9\, x^2 - 4\, y^2\right)$$

Nullstellen und Extremwerte

Die hohe Symmetrie ist aus der Konstruktion ersichtlich.
Die Nullstellen sind +-a. Die Extremwerte sind die Ordinaten der Scheitel der erzeugenden Parabeln, also +- $\frac{a^2}{2\,b}$.
Die Extremstellen können aus der Gerono-Gleichung bestimmt werden:

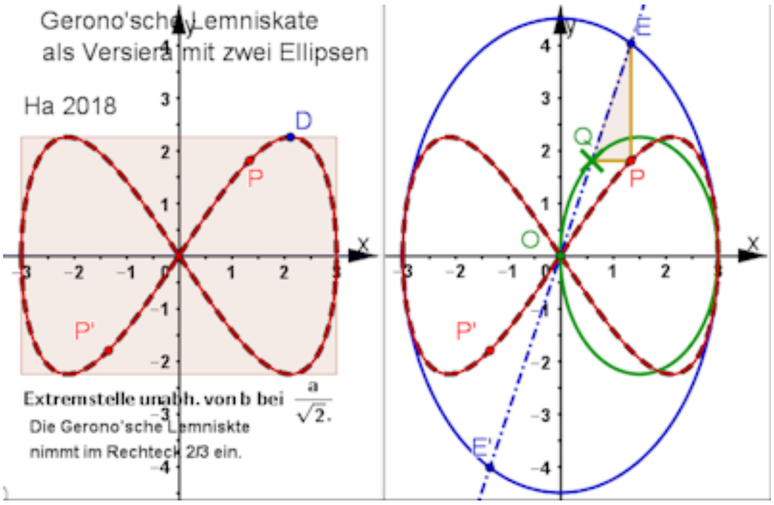
In[2]:= `Solve[(Gerono /. y -> a^2/(2 b)) // Evaluate, x]`
löse · werte aus

Out[2]= $\left\{\left\{x \to -\frac{a}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to -\frac{a}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to \frac{a}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to \frac{a}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Die Extremstellen sind unabhängig von b, die Ortskurve der Extremstellen ist also ein zur y-Achse paralleles Geradenpaar im Abstand $a\sqrt{2}$.

Dies ist die Diagonale eines Quadrates mit Kantenlänge a.

Gerono’sche Lemniskate als Versiera
Spez. BMG-Lemniskate



$$\text{gruen} = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{a^4}{4\,b^2}} == 1;$$

$$\text{blau} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2} == 1;$$

Ist Q im Extrempunkt der grünen Ellipse, dann gilt $Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2b}\right)$.

Es hat der Lemniskatenpunkt P die die Abszisse $\frac{a}{\sqrt{2}}$ wie oben gezeigt.

a =.; b =.

Die Gerade durch Q hat die Gleichung

$$y == \frac{\frac{a^2}{2b}}{\frac{a}{2}}\,x$$

$$y == \frac{a\,x}{b}$$

Die Ordinate von E ist damit

$$y == \frac{a\,x}{b}\ /.\ x \to \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y == \frac{a^2}{\sqrt{2}\,b}$$

Damit kann die zweite Halbachse der blauen Ellipse bestimmt werden:

$$\text{blau} \;/.\; \left\{x \to \frac{a}{\sqrt{2}},\; y \to \frac{a^2}{\sqrt{2}\; b}\right\}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a^4}{2\, b^2\, k^2} == 1$$

$$\text{Solve}\left[\frac{a^4}{2\, b^2\, k^2} == \frac{1}{2},\, \{k\}\right]$$

löse

$$\left\{\left\{k \to -\frac{a^2}{b}\right\},\, \left\{k \to \frac{a^2}{b}\right\}\right\}$$

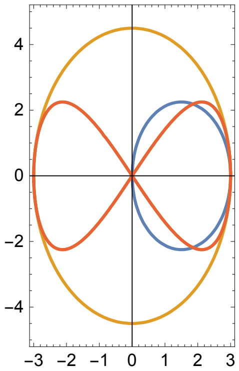
Damit ist $k^2 = \frac{a^4}{b^2}$

$$\text{blauok} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2\, y^2}{a^4} == 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2\, y^2}{a^4} == 1$$

```
a = 3;
b = 2;
ContourPlot[{gruen, blauok, Gerono, 9 x^4 == a^2 (9 x^2 - 4 y^2)} // Evaluate,
 {x, -3, 3}, {y, -5, 5}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]
a =.;
b =.;
```

Konturgraphik; werte aus; Seitenverhältnis; automatisch; Axen; wahr



Beweis, dass diese Konstruktion wirklich die Gerono-Lemniskate ergibt

Angelehnt an Satz 4. Seite 88 im Buch

$$\text{eins} = \text{grün} \;/.\; x \to u$$

$$\frac{4\left(-\frac{a}{2} + u\right)^2}{a^2} + \frac{4\, b^2\, y^2}{a^4} == 1$$

```
zwei = blau /. {y → t, k → a^2/b}
```

$$\frac{b^2 t^2}{a^4} + \frac{x^2}{a^2} == 1$$

```
ger = x y == u t
```

$x\,y == t\,u$

```
Eliminate[{eins, zwei, ger} // Evaluate, {u, t}]
```

eliminiere werte aus

$-a^2 x^2 y + x^4 y == -b^2 y^3 \;\&\&\; a \neq 0$

Nach Division durch y ist dies die Gerono-Gleichung

$-a^2 x^2 + x^4 == -b^2 y^2$

Fläche unter der Gerono’schen-Lemniskate

$x^2 \left(a^2 - x^2\right) = b^2 y^2$

```
f[x_] := x/b Sqrt[(a^2 - x^2)]
```

```
Integrate[f[x], x]
```

integriere

$$-\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{3\,b}$$

```
Integrate[f[x], {x, 0, a}] // PowerExpand
```

integriere multipliziere Potenzen aus

$$\frac{a^3}{3\,b}$$

Die Gerono’sche Lemniskate hat den Flächeninhalt

```
le = 4 a^3/(3 b);
```

Speziell hat die **BMG-Lemniskate,** bei der $b = \frac{2}{3} a$ ist,

den **Inhalt** $\boldsymbol{2\,a^2}$

Das umbeschriebene Rechteck hat die Fläche

```
re = 2 a 2 a^2/(2 b)
```

$$\frac{2\,a^3}{b}$$

```
le/re
```

$$\frac{2}{3}$$

DieGerono’sche Lemniskate nimmt für alle a und b im umbeschriebenen Rechteck genau $\frac{2}{3}$ ein.

Das gilt damit auch für die BMG-Lemniskate.